G. M. RAYMOND

Géométrie analitique. De la génération de la parabole, par l'intersection de deux lignes droites

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 143-147
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__143_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

De la génération de la parabole, par l'intersection de deux lignes droites; (*)

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs Sociétés savantes et littéraires.

Soient IX, IY (fig. 3) deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, prises, la première pour axe des x, et la seconde pour

(*) Voyez le mémoire inséré à la page 360 du second volume des *Annales*, auquel celui-ci fait suite.

axe des y. Soit F un point fixe pris sur IX, et soit Ff une droite mobile assujettie à passer constamment par ce point F. Soit Tt une autre droite mobile, coupant la première en M et la droite IX en T; soit menée l'ordonnée MP du point variable M. Supposons que le mouvement de Tt soit lié à celui de Ff autour du point fixe F, de manière qu'on ait constamment

$$\text{Ang.FMT}=\text{Ang.FTM}\ ,\quad \text{IP}=\text{IT}\ ;$$

et proposons-nous de déterminer le lieu géométrique de l'intersection M des deux droites Ff et Tt.

Posons IF$=c$; les équations des deux droites Tt et Ff seront de la forme

$$y=Ax+B\ , \qquad (1)$$

$$y=A'(x-c)\ ; \qquad (2)$$

on trouvera d'après cela

$$\text{IP}=\frac{B+A'c}{A'-A}\ ,\quad \text{IT}=-\frac{B}{A}\ ,\quad \text{Tang.FMT}=\frac{A'-A}{1+AA'}\ ;$$

or, suivant les conditions du problème, 1.° IP et IT doivent être égaux et de signes contraires; 2.° la tangente de l'angle FMT doit être égale à celle de l'angle FTM, c'est-à-dire, égale à A; ainsi on aura, entre les trois constantes A, A', B, les deux équations

$$\frac{B+A'c}{A'-A}=\frac{B}{A}\ , \quad (3) \qquad \frac{A'-A}{1+AA'}=A\ ; \quad (4)$$

si donc, entre les équations (1), (2), (3), (4), on élimine les trois quantités A, A', B, l'équation résultante en x, y et c, sera celle de la courbe cherchée.

L'élimination s'exécute assez facilement comme il suit. D'abord en prenant le produit des équations (4) et (5), et exécutant toutes les réductions qui se présentent, on a

$$AB=c\ ; \qquad (5)$$

d'un autre côté, en chassant les dénominateurs dans l'équation (3), et ayant égard à l'équation (5), il vient

$$2c=A'(B-Ac)\ , \qquad (6)$$

éliminant A′ entre cette dernière et l'équation (2), on a

$$2c(x-c)=y(B-Ac)\ ; \qquad (7)$$

l'équation (7), combinée avec l'équation (1), donne

$$A=\frac{y^2-2c(x-c)}{y(x+c)}\ , \quad B=c.\frac{y^2+2x(x-c)}{y(x+c)}\ ;$$

enfin, ces valeurs étant substituées dans l'équation (5), on obtient, toutes réductions faites,

$$\{y^2+(x-c)^2\}(y^2-4cx)=0.$$

L'égalité du premier facteur à zéro donnerait évidemment un point conjugué, situé en F ; rejetant donc ce facteur, l'équation de la courbe décrite par le point M sera

$$y^2=4cx\ ;$$

c'est-à-dire, que cette courbe sera une parabole, ayant le point I pour sommet et le point F pour foyer.

Soit porté IF sur le prolongement de IP de I en G ; par le point G soit menée une parallèle GH à IY, et soit enfin abaissée, du point M, une perpendiculaire MQ sur cette parallèle ; à cause des angles égaux FMT et FTM, et de IT=IP, on aura

$$\mathrm{MF}=\mathrm{FT}=\mathrm{FI}+\mathrm{IT}=\mathrm{IG}+\mathrm{IP}=\mathrm{PG}=\mathrm{MQ}\ ,$$

ainsi chaque point M de la courbe est à une même distance de la droite GH et du point F.

L'inclinaison de la droite Tt étant donnée, il ne peut y avoir qu'une seule direction de FM pour laquelle la condition Ang.FMT =Ang.FTM soit satisfaite ; donc la droite Tt n'a que le seul point M de commun avec la courbe et lui est conséquemment tangente en ce point ; et, comme on a, par construction, Ang.FMT=Ang.FTM =Ang.QMT, il en faut conclure que, dans la parabole, *la tangente en un point divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur et le prolongement d'une parallèle à l'axe menés par ce même point*; enfin, de ce que IT=IP, on voit que, dans la parabole, *la sous-tangente* est *double de l'abscisse.*

Nous venons de voir qu'on a constamment MQ=MF et Ang.FMT =Ang.FQT ; si donc l'angle MFT est droit ou, ce qui revient au même, si le point P coïncide avec le point I, le quadrilatère GQMF deviendra un quarré ; et MT, qui en sera la diagonale, viendra passer par le point G ; on aura donc alors FM=FG=2FI ; ainsi, dans la parabole, *l'ordonnée qui répond au foyer est double de la distance de ce foyer au sommet*; *la tangente à l'extrémité de cette ordonnée fait un angle demi-droit avec elle, et passe par l'intersection de l'axe de la courbe avec sa directrice.* Cette dernière propriété de la parabole lui est commune, au surplus, avec l'ellipse et l'hyperbole.

D'après ce qui précède, en désignant par x' et y' les coordonnées du point M, l'équation de la tangente en ce point sera

$$y-y'=A(x-x') ,$$

ou

$$y-y'=\frac{y'^2-2c(x'-c)}{y'(x'+c)}(x-x') ,$$

ou, en mettant pour y'^2 sa valeur $4cx'$ et réduisant,

$$y-y'=\frac{2c}{y'}(x-x') ;$$

l'équation de toute corde parallèle à cette tangente sera donc de la forme

$$y=\frac{2c}{y'}x+\mathrm{D}.$$

On obtiendra les coordonnées des extrémités de cette corde, en combinant cette dernière équation avec l'équation

$$y^2=4cx.$$

L'élimination de x entre ces deux équations donne

$$y^2-2y'y+Dy'=0\ ;$$

la somme des ordonnées des extrémités de la corde dont il s'agit est donc $2y'$; la moitié de cette somme, c'est-à-dire, l'ordonnée du milieu de la corde est donc $y'=\text{MP}$; cette corde a donc son milieu sur le prolongement ME de la parallèle MQ menée à l'axe par le point M. Ainsi, dans la parabole, *toute parallèle à l'axe est un diamètre de la courbe.*

Ce qui précède, et ce qui a déjà été dit dans l'article auquel celui-ci fait suite, paraît très-propre à faire voir combien le choix des constructions, dans la génération des courbes, peut influer sur la déduction, plus ou moins facile et lumineuse, de leurs diverses propriétés.

Chambéry, 12 février 1812.