J. F. FRANÇAIS

Correspondance. Lettre de M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie du génie, présentant la solution analitique complète du problème où il s'agit de déterminer une sphère qui touche quatre sphères données

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 158-161
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__158_1>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie du génie, Au Rédacteur des *Annales*;

Présentant la solution analitique complète du problème où il s'agit de déterminer une sphère qui touche quatre sphères données.

Monsieur,

M. Poisson vient de publier, dans le *Bulletin des sciences de la société philomatique* (*), une solution analitique du problème de la sphère qui touche quatre sphères données. J'en ai publié une aussi, il y a près de trois ans, dans la *Correspondance sur l'école polythecnique* (**). A la vérité cette solution, telle qu'elle est, ne suffit pas pour déterminer *analitiquement* les coordonnées du centre et le rayon de la sphère cherchée, que j'enseigne à déterminer *géométriquement* dans mon mémoire; mais il faut très-peu ajouter à ma solution, pour achever de la rendre complète, sous le point de vue analitique, comme on en pourra juger par ce qui suit.

Soient r, r', r'', r''', les rayons des quatre sphères données, et $2a$, $2b$, $2c$ les distances respectives du centre de la première aux centres des trois autres; soient de plus R le rayon de la sphère cherchée, et ρ, ρ', ρ'',

(*) Tome III, n.o 60, septembre 1812, page 141.

(**) Tome II, n.o 2, janvier 1810, page 63.

ρ''' les distances de son centre à ceux des quatre sphères données. Cela posé, on aura

$$R\mp r=\rho\ ,\quad R\mp r'=\rho'\ ,\quad R\mp r''=\rho''\ ,\quad R\mp r'''=\rho'''. \qquad (1)$$

Ces quatre équations, avec leurs doubles signes, fournissent seize combinaisons differentes, qui correspondent à autant de solutions du problème. Nous nous bornerons au cas des signes supérieurs, attendu que les autres peuvent se traiter de la même manière.

En retranchant la première de ces équations de chacune des trois autres, et posant, pour abréger,

$$r-r'=2d\ ,\quad r-r''=2d'\ ,\quad r-r'''=2d''\ ,$$

il vient $\rho'=\rho+2d\ ,\quad \rho''=\rho+2d'\ ,\quad \rho'''=\rho+2d''.\qquad (2)$

Mais on a d'un autre côté

$$\left.\begin{aligned}\rho'^2&=\rho^2+4a^2-4a\rho\,\mathrm{Cos.}(\rho,a)\ ,\\ \rho''^2&=\rho^2+4b^2-4b\rho\,\mathrm{Cos.}(\rho,b)\ ,\\ \rho'''^2&=\rho^2+4c^2-4c\rho\,\mathrm{Cos.}(\rho,c)\ .\end{aligned}\right\}(3)$$

Egalant ces valeurs aux quarrés des équations (2), on trouve

$$\left.\begin{aligned}\rho\{a\,\mathrm{Cos.}(\rho,a)+d\}&=a^2-d^2\ ,\\ \rho\{b\,\mathrm{Cos.}(\rho,b)+d'\}&=b^2-d'^2\ ,\\ \rho\{c\,\mathrm{Cos.}(\rho,c)+d''\}&=c^2-d''^2\ .\end{aligned}\right\}(4)$$

Si, entre ces trois équations, on élimine ρ, on obtient les trois équations suivantes, dont une quelconque est une suite des deux autres.

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,a)-\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,b)&=\frac{d'}{b}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\ ,\\ \left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,b)-\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,c)&=\frac{d''}{c}\left(\frac{b^2-d'^2}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\ ,\\ \left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,c)-\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)\mathrm{Cos.}(\rho,a)&=\frac{d}{a}\left(\frac{c^2-d''^2}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{a^2-d^2}{a}\right)\ .\end{aligned}\right\}(5)$$

Tout ceci suffit, pour la construction géométrique du problème, comme je l'ai fait voir en l'endroit cité de la *Correspondance*. En y ajoutant la relation qui existe entre les angles que la droite ρ fait avec les droites a, b, c; relation que j'ai aussi donnée dans la même *Correspondance* (*), on a tout ce qu'il faut pour déterminer analitiquement les coordonnées du centre de la sphère cherchée, ainsi que son rayon.

Cette relation est

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{Cos.}^2(\rho\,,a)}{\mathrm{Sin.}^2(a\,,bc)}-2\dfrac{\mathrm{Cos.}(\rho\,,b)\mathrm{Cos.}(\rho\,,c)}{\mathrm{Sin.}(b\,,ac)\mathrm{Sin.}(c\,,ab)}\mathrm{Cos.}(ab\,,ac)\\[2ex]+\dfrac{\mathrm{Cos.}^2(\rho\,,b)}{\mathrm{Sin.}^2(b\,,ac)}-2\dfrac{\mathrm{Cos.}(\rho\,,a)\mathrm{Cos.}(\rho\,,c)}{\mathrm{Sin.}(a\,,bc)\mathrm{Sin.}(c\,,ab)}\mathrm{Cos.}(ab\,,bc)\\[2ex]+\dfrac{\mathrm{Cos.}^2(\rho\,,c)}{\mathrm{Sin.}^2(c\,,ab)}-2\dfrac{\mathrm{Cos.}(\rho\,,a)\mathrm{Cos.}(\rho\,,b)}{\mathrm{Sin.}(a\,,bc)\mathrm{Sin.}(b\,,ac)}\mathrm{Cos.}(ac\,,bc)\end{array}\right\}=1. \qquad (6)$$

En éliminant de cette équation, au moyen des équations du premier degré (5), deux des trois quantités $\mathrm{Cos.}(\rho\,,a)$, $\mathrm{Cos.}(\rho\,,b)$, $\mathrm{Cos.}(\rho\,,c)$, la troisième sera donnée par une équation du second degré; et les deux autres seront données ensuite par les mêmes équations (5). Il ne restera donc plus à déterminer que la valeur de ρ, qui sera fournie par une quelconque des équations (4), du premier degré.

La solution du problème est donc complète, et (et je crois) la plus simple possible.

N. B. On trouve deux solutions, pour la position de ρ, parce que les équations (2) sont les mêmes, aux signes près, soit qu'on prenne tous les signes supérieurs dans les équations (1), soit qu'on y prenne tous les signes inférieurs. Mais, comme nous n'avons employé que les quarrés des équations (2) qui comprennent l'un et l'autre signes, il s'ensuit que nous avons dû obtenir la solution des deux cas.

Agréez, etc.

Metz, le 2 octobre 1812.

Remarque du Rédacteur.

On sait que le traité de Viète sur le *Contact des cercles* contient *dix* problèmes, et que celui de Fermat sur le *Contact des sphères* en renferme *quinze*. On sait, de plus que le dernier des problèmes de Viète est celui où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois*

(*) Voyez tome I, n.° 9, janvier 1808, page 343, équation (24).

cercles donnés ; et que le dernier de ceux de Fermat est celui où il s'agit de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données*. On sait enfin que Viète et Fermat résolvent leur dernier problème, en le ramenant à l'un des précédens, lequel ne peut lui-même être résolu qu'à l'aide de l'un de ceux qui le précèdent, et ainsi de suite ; ce qui, pour le dire en passant, rend la solution effective du dernier problème beaucoup plus compliquée qu'elle ne le paraît au premier abord.

On peut, en employant l'analise, suivre une marche tout à fait inverse, et tirer au contraire de la solution du dernier problème, soit de Viète soit de Fermat, la solution de tous ceux qui le précèdent.

Il est aisé de voir, en effet, que, dans tous ces problèmes, la question peut se réduire à trouver le rayon soit du cercle soit de la sphère cherchée. Concevons donc que l'on ait obtenu l'expression analitique du rayon de ce cercle ou de cette sphère, et que l'on ait pris pour données les rayons des cercles ou des sphères données, et les plus courtes distances de leurs circonférences ou surfaces, considérées deux à deux. Si, dans cette expression, on suppose un ou plusieurs rayons nuls ou infinis, les cercles ou sphères auxquels ils appartiendront, deviendront aussitôt des points dans le premier cas, et des droites ou des plans dans le second. En faisant donc toutes les combinaisons possibles de ces deux sortes de suppositions, on parviendra à déduire d'une formule unique, celles qui conviennent à tous les cas.