ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PESCHIER

Questions résolues. Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 du deuxième volume des Annales. Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 161-163
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__161_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 du deuxième volume des Annales.

Première solution ;

Par M. Peschier, inspecteur et professeur de philosophie à l'académie impériale de Genève.

Enoncé. *Si à une ellipse on circonscrit un quadrilatère quel-*

conque, le point d'intersection des deux droites qui joindront les points de contact de l'ellipse avec les côtés opposés de ce quadrilatère, coïncidera avec le point d'intersection de ses deux diagonales.

Comme toute ellipse est la projection orthogonale d'un cercle, sur un plan non parallèle à celui d'un cercle, et que, dans cette espèce de projection, les points d'intersection et de contingence sont les projections des points d'intersection et de contingence de la figure projetée; et les droites qui les joignent, projections de celles qui joignent les points correspondans de cette figure; il suffira, pour établir le théorème, par rapport à l'ellipse, de l'avoir démontré dans le cercle.

LEMME. Un angle quelconque, aigu ou obtus étant donné, il peut toujours être divisé en deux parties dont les sinus aient entre eux un rapport donné; et il ne peut être ainsi divisé que d'une manière unique.

Cela est évident, lorsque les deux parties de l'angle sont des angles aigus; et, quand l'une d'elles est un angle obtus, on démontrera que les parties dont les sinus ont le rapport assigné ne peuvent varier, sans que le rapport des sinus ne varie aussi; mais une construction simple et facile démontre à la fois la possibilité et l'unité de division de l'angle, suivant la condition demandée.

Soit donc ACB (fig. 4 et 5) un angle quelconque, partagé en deux parties par le rayon CD=CA=CB; soit tirée AB, coupant CD en M, et soient menés les sinus respectifs AP, BQ des angles ACD, BCD; la similitude des triangles MAP, MBQ donnera

$$AP:BQ\text{, ou } Sin.ACD:Sin.BCD::AM:BM\ ;$$

or, AB peut toujours être divisée de façon que le rapport de AM à BM soit un rapport donné, et ne peut l'être que d'une seule manière; donc l'angle ACB peut toujours être divisé en sorte que les sinus de ses parties soient en rapport donné, et ne peut l'être que d'une manière unique.

Démonstration du theorème. Soit C (fig. 6) le centre d'un cercle ABDE auquel soit circonscrit un quadrilatère FGHK, de telle sorte que A, B, D, E soient respectivement les points de contact du cercle avec ses côtés FG, GH, HK, KF. Soient tirées les cordes AD, BE, joignant les points de contact opposés (ou alternatifs) A et D, B et E, lesquelles se coupent en O ; enfin, de ce point O soient menées à deux sommets alternatifs quelconques F, H du quadrilatère circonscrit, les droites OF, OH ; je dis que ces deux droites n'en feront qu'une.

En effet,

$$\text{dans les triangles}\left\{\begin{matrix}\text{OBH}\\ \text{ODH}\end{matrix}\right\}\text{on a}\left\{\begin{matrix}\text{OH}:\text{BH}::\mathit{Sin}.\text{OBH}:\mathit{Sin}.\text{BOH}\;,\\ \text{OH}:\text{DH}::\mathit{Sin}.\text{ODH}:\mathit{Sin}.\text{DOH}\;;\end{matrix}\right.$$

mais BH=DH ; donc

$$\mathit{Sin}.\text{OBH}:\mathit{Sin}.\text{ODH}::\mathit{Sin}.\text{BOH}:\mathit{Sin}.\text{DOH}.$$

Pareillement,

$$\text{dans les triangles}\left\{\begin{matrix}\text{OEF}\\ \text{OAF}\end{matrix}\right\}\text{on a}\left\{\begin{matrix}\text{OF}:\text{EF}::\mathit{Sin}.\text{OEF}:\mathit{Sin}.\text{EOF}\;,\\ \text{OF}:\text{AF}::\mathit{Sin}.\text{OAF}:\mathit{Sin}.\text{AOF}\;;\end{matrix}\right.$$

mais EF=AF ; donc

$$\mathit{Sin}.\text{OEF}:\mathit{Sin}.\text{OAF}::\mathit{Sin}.\text{EOF}:\mathit{Sin}.\text{AOF}.$$

De plus,

$$\left.\begin{matrix}\text{OBH}=180^\circ-\text{OEF}\;,\\ \text{ODH}=180^\circ-\text{OAF}\;;\end{matrix}\right\}\text{donc}\left\{\begin{matrix}\mathit{Sin}.\text{OBH}=\mathit{Sin}.\text{OEF}\;,\\ \mathit{Sin}.\text{ODH}=\mathit{Sin}.\text{OAF}\;,\end{matrix}\right.$$

donc

$$\mathit{Sin}.\text{BOH}:\mathit{Sin}.\text{DOH}::\mathit{Sin}.\text{EOF}:\mathit{Sin}.\text{AOF}\;;$$

mais BOD=EOA ; donc (*Lemme*) BOH=EOF, DOH=AOF ; donc OF, OH sont en ligne droite ; c'est-à-dire, que les diagonales du quadrilatère circonscrit passent par l'intersection des droites qui joignent les points de contact opposés. *C.Q.F.D.* (*)

(*) La proposition étant ainsi démontrée pour le cercle, se trouve l'être aussi pour toute section conique, qui peut toujours être considérée comme la perspective d'un certain cercle.

J. D. G.