ROCHAT

Deuxième démonstration

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 164-166
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__164_0>

Deuxième démonstration ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

Le théorème dont il s'agit n'est qu'un cas particulier du suivant, dont nous allons donner la démonstration.

THÉORÈME. Si, à une ligne quelconque du second ordre, on circonscrit un quadrilatère complet quelconque ; le point d'intersection de deux quelconques des trois diagonales de ce quadrilatère, sera aussi le point d'intersection des deux droites qui joindront les points où les côtés opposés du quadrilatère simple, auquel ces diagonales appartiennent, sont touchés par la courbe.

Démonstration. Soient prises pour axes des coordonnées deux droites, dont l'une passe par deux quelconques des points de contact, et dont l'autre passe par les deux autres ; la courbe, rapportée à ces deux axes, aura une équation de la forme

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 . \qquad \text{(A)}$$

On en déduira la situation de ces points, en y faisant successivement x et y égal à zéro et résolvant l'équation résultante.

Soient donc désignés par Y, Y′ les deux points de contact qui sont situés sur l'axe des y et par X, X′ ceux qui sont situés sur l'axe des x ; en posant, pour abréger,

$$d^2-4af=D^2 , \qquad e^2-4cf=E^2 ,$$

on trouvera les coordonnées de ces points ainsi qu'il suit :

$$\text{pour Y}\left\{\begin{array}{l} x=0 , \\ y=-\dfrac{d-D}{2a} ; \end{array}\right. \qquad \text{pour Y}'\left\{\begin{array}{l} x=0 , \\ y=-\dfrac{d+D}{2a} ; \end{array}\right.$$

$$\text{pour X}\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{e-E}{2c} , \\ y=0 ; \end{array}\right. \qquad \text{pour X}'\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{e+E}{2c} , \\ y=0 . \end{array}\right.$$

Cela posé, on sait que l'équation de la tangente menée à la courbe par un point dont les coordonnées sont x', y', peut être mise sous cette forme

$$(2ay+bx+d)y'+(2cx+by+e)x'+(dx+ey+2f)=0 ;$$

mettant

mettant donc successivement, pour x', y', dans cette équation, les valeurs determinées ci-dessus, designant les tangentes par leur point de contact, et posant encore, pour abreger,

$$bd-2ae=A\ ,\quad be-2cd=C\ ,$$

on trouvera les équations de ces tangentes ainsi qu'il suit :

pour Y, $\quad 2aDy+(bD-A)x+D(d-D)$,

pour Y', $\quad 2aDy+(bD+A)x+D(d+D)$,

pour X, $\quad 2cEx+(bE-C)y+E(e-E)$,

pour X', $\quad 2cEx+(bE+C)y+E(e+E)$.

Si l'on combine entre elles la première et la troisième équations, puis la seconde et la quatrième, puis la première et la quatrième, puis enfin la seconde et la troisième, on obtiendra les coordonnées des sommets du quadrilatère circonscrit ; d'où il sera facile de conclure les équations des diagonales de ce quadrilatère et de s'assurer conséquemment si ces diagonales passent en effet par l'origine.

Mais on peut parvenir plus simplement au but, en procédant comme il suit. Soit designé par (Y, X) le sommet du quadrilatère, formé par la rencontre des tangentes dont les points de contact sont Y, X; et soient adoptées des notations analogues pour les autres sommets. Soit en outre désignée par [(Y, X), (Y′, X′)] la diagonale qui joint les sommets (Y, X), (Y′, X′) et soit adoptée une notation analogue pour l'autre diagonale.

Cela posé, soient éliminés les termes tout connus, entre les équations Y, X, en réduisant ces termes à l'unité, dans l'une et dans l'autre, et prenant ensuite la difference des deux équations. En employant toujours les abréviations ci-dessus, et posant en outre

$$AE+CD=F\ ,$$

il viendra ainsi,

$$E(F-bDE+2cD^2-eA)x=D(F-bDE+2aE^2-dC)y.$$

Cette équation, ayant lieu en même temps que les équations Y et X et n'ayant point de terme constant, doit être celle d'une droite menée de l'origine au point (Y, X). Or, par les substitutions, il est aisé de se convaincre que

$$2cD^2-eA=2aE^2-dC=2ac^2+2cd^2-bde-8acf\,,$$

donc aussi

$$F-bDE+2cD^2-eA=F-bDE+2aE^2-dC\ ;$$

donc l'équation de la droite qui joint l'origine au point (Y, X) est simplement

$$Dy=Ex. \qquad \text{(I)}$$

Le système des équations Y′, X′ n'étant autre chose que celui des équations Y, X, dans lequel on aurait changé à la fois les signes de D et E ; on obtiendra l'équation de la droite qui joint l'origine au point (Y′, X′) en opérant un pareil changement dans l'équation (I) ; et, comme alors elle reste la même, il en faut conclure que cette équation est celle d'une droite qui passe à la fois par l'origine et par les deux points (Y, X), (Y′, X′), qui sont ainsi en ligne droite avec cette origine.

Un semblable raisonnement prouvera que les sommets (Y, X), (Y′, X′), sont, avec l'origine, sur une même ligne droite, dont l'équation est

$$Dy=-Ex. \qquad \text{(II)}$$

Ainsi les deux diagonales du quadrilatère dont les côtés opposés touchent la courbe aux points où elle coupe les axes, peuvent etre exprimées par l'équation unique

$$y=\pm x\sqrt{\frac{e^2-4cf}{d^2-4af}}\ ;$$

et il est digne de remarque que la direction de ces diagonales est indépendante de la grandeur et du signe du coefficient b.