

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

DU BOURGUET

**Trigonométrie. Démonstration de quelques formules  
trigonométriques nouvelles ou peu connues**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 3 (1812-1813), p. 19-25

[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1812-1813\\_\\_3\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__19_0)

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TRIGONOMÉTRIE.

*Démonstration de quelques formules trigonométriques nouvelles ou peu connues ;*

Par M. DU BOURGUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.



SOIT  $\varphi(n)$  une fonction quelconque d'un nombre  $n$ , que nous supposons essentiellement entier et positif ; convenons, pour abrégér, de dénoter simplement par  $P\{\varphi(g\dots h)\}$  le produit de toutes les valeurs que reçoit la fonction  $\varphi(n)$ , lorsqu'on y met successivement pour  $n$  les nombres consécutifs de la suite naturelle  $g, g+1, g+2, \dots, h$  ; en sorte qu'on ait

$$P\{\varphi(g\dots h)\} = \varphi(g) \times \varphi(g+1) \times \varphi(g+2) \times \dots \times \varphi(h).$$

Cette notation admise, le *Théorème de Côte* donne

$$a^{4m} - 2a^{2m}b^{2m}\text{Cos.}z + b^{4m} = P\left\{a^2 + 2ab.\text{Cos.}\frac{2(0\dots m-1)z+z}{2m} + b^2\right\};$$

la complication des calculs qu'elle exige. Il désirerait donc que l'on pût déterminer tous les systèmes de valeurs des inconnues qui satisfont à des équations proposées, sans être obligé d'y avoir recours. C'est là, en effet, un sujet qui serait tout à fait digne de fixer l'attention des géomètres. Toute la difficulté du problème se réduirait évidemment à savoir déterminer sans résoudre aucune équation, 1.° les limites extrêmes des valeurs de chacune des inconnues ; 2.° une limite au-dessous de laquelle ne pût tomber la différence entre deux valeurs de chacune de ces mêmes inconnues.

J. D. G.

pourvu qu'on prenne successivement le signe  $+$  et le signe  $-$  dans le second membre.

En exposant  $b=a$ , cette formule devient

$$2a^{4m}(1-\text{Cos}.z)=P\left\{2a^2\left[1\pm\text{Cos}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right]\right\};$$

sortant de dessous le signe  $P$  le facteur  $2a^2$  qui deviendra au dehors  $2^{2m}a^{4m}$ , remarquant que  $1-\text{Cos}.z=2\text{Sin}.\frac{z}{2}$ , et divisant par  $4a^2$ , il viendra

$$\text{Sin}.\frac{z}{2}=2^{2m-2}\cdot P\left\{1\pm\text{Cos}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\};$$

ou

$$\text{Sin}.\frac{z}{2}=2^{2m-2}\cdot P\left\{1+\text{Cos}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\}\times P\left\{1-\text{Cos}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin}.\frac{z}{2}=2^{2m-2}\cdot P\left\{1-\text{Cos}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin}.\frac{z}{2}=2^{2m-2}\cdot P\left\{\text{Sin}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou, en extrayant la racine quarrée

$$\text{Sin}.\frac{z}{2}=2^{m-1}\cdot P\left\{\text{Sin}.\frac{2(0\dots m-1)\varpi+z}{2m}\right\}.$$

Faisant enfin  $z=2x$ , il viendra

$$\text{Sin}.x=2^{m-1}\cdot P\left\{\text{Sin}.\frac{(0\dots m-1)\varpi+x}{m}\right\}.$$

En développant le second membre de cette équation, elle deviendra

$$\text{Sin}.x=2^{m-1}\cdot\text{Sin}.\frac{x}{m}\cdot\text{Sin}.\frac{\varpi+x}{m}\cdot\text{Sin}.\frac{2\varpi+x}{m}\dots\text{Sin}.\frac{(m-2)\varpi+x}{m}\cdot\text{Sin}.\frac{(m-1)\varpi+x}{m}; \quad (1)$$

mais comme, en général,  $\text{Sin}.\frac{(m-n)\varpi+x}{m}=\text{Sin}.\frac{n\varpi-x}{m}$ , on pourra encore mettre la même équation sous cette autre forme

$$\text{Sin. } x = 2^{m-1} \cdot \text{Sin. } \frac{x}{m} \cdot \text{Sin. } \frac{x+x}{m} \cdot \text{Sin. } \frac{2x+x}{m} \dots \text{Sin. } \frac{2x-x}{m} \cdot \text{Sin. } \frac{x-x}{m}. \quad (\text{II})$$

Ces formules assez remarquables en elles-mêmes, conduisent immédiatement à celles que Lacroix a démontrées, d'après Lhuilier, dans son *Traité des différences et des séries* (\*). Il suffit, en effet, pour les en déduire, de faire dans l'équation (I),  $x = \frac{1}{2} \pi$ , et dans l'équation (II),  $x = \frac{1}{4} \pi$ , en multipliant cette dernière par 2. On obtient ainsi

$$1 = 2^{m-1} \text{Sin. } \frac{1}{m} \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sin. } \frac{3}{m} \frac{\pi}{2} \dots \text{Sin. } \frac{2m-3}{m} \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sin. } \frac{2m-1}{m} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B})$$

$$\sqrt{2} = 2^m \text{Sin. } \frac{1}{2m} \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sin. } \frac{3}{2m} \frac{\pi}{2} \dots \text{Sin. } \frac{2m-3}{2m} \frac{\pi}{2} \cdot \text{Sin. } \frac{2m-1}{2m} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A})$$

La formule (B) est un peu plus élégante que celle de Lhuilier, que Lacroix a désignée par la même lettre. La différence naît de ce qu'ici les valeurs de  $m$  commencent à l'unité, tandis que, dans la formule de Lhuilier, elles commencent à zéro.

En concentrant, pour plus de brièveté, les seconds membres des équations (B) et (A), et multipliant la première par 2, elles deviennent

$$2 = 2^m P \left\{ \text{Sin. } \frac{2(1 \dots m) - 1}{2m} \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (\text{B}')$$

$$\sqrt{2} = 2^m P \left\{ \text{Sin. } \frac{2(1 \dots m) - 1}{2m} \frac{\pi}{2} \right\}; \quad (\text{A}')$$

et il est très-remarquable qu'on obtient la racine quarrée du produit

$$2^m P \left\{ \text{Sin. } \frac{2(1 \dots m) - 1}{2m} \frac{\pi}{2} \right\},$$

par la simple substitution de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\pi$ .

De cette relation on peut conclure, en quarrant l'équation (A'),

(\*) Voyez le n.º 1094, page 431, équations (A) et (B).

$$2^m P \left\{ \text{Sin.}^2 \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = P \left\{ \text{Sin.} 2 \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\};$$

ou, en se rappelant que  $\text{Sin.} 2x = 2 \text{Sin.} x \text{Cos.} x$

$$2^m P \left\{ \text{Sin.}^2 \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = P \left\{ 2 \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \text{Cos.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\};$$

ou, en remarquant que 2 est  $m$  fois facteur dans le second membre,

$$P \left\{ \text{Sin.}^2 \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = P \left\{ \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \text{Cos.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m^2} \cdot \frac{\pi}{2} \right\},$$

ou encore

$$P \left\{ \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} P \left\{ \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = P \left\{ \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} P \left\{ \text{Cos.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\};$$

ou enfin

$$P \left\{ \text{Sin.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = P \left\{ \text{Cos.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}; \quad (\text{C})$$

d'où résulte encore

$$P \left\{ \text{Tang.} \frac{2(1\dots m)-1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2} \right\} = 1.$$

Posant  $\frac{\pi}{4m} = \omega$ , d'où  $m = \frac{\pi}{4\omega}$ , et  $2m-1 = \frac{\pi-2\omega}{2\omega}$ , il viendra, en substituant dans l'équation (C) et développant,

$$\text{Sin.} \omega \text{Sin.} 3\omega \text{Sin.} 5\omega \dots \text{Sin.} \left( \frac{1}{2} \pi - \omega \right) = \text{Cos.} \omega \text{Cos.} 3\omega \text{Cos.} 5\omega \dots \text{Cos.} \left( \frac{1}{2} \pi - \omega \right); \quad (\text{D})$$

équation qui, au surplus, se vérifie aisément d'elle-même, en observant que

$$\text{Sin.} \omega = \text{Cos.} \left( \frac{1}{2} \pi - \omega \right),$$

$$\text{Sin.} 3\omega = \text{Cos.} \left( \frac{1}{2} \pi - 3\omega \right),$$

.....,

$$\text{Sin.} \left( \frac{1}{2} \pi - 3\omega \right) = \text{Cos.} 3\omega,$$

$$\text{Sin.} \left( \frac{1}{2} \pi - \omega \right) = \text{Cos.} \omega.$$

Si l'on divise le premier membre de l'équation (D) par le second, et *vice versa*, il viendra

$$\text{Tang. } \omega \text{ Tang. } 3\omega \dots \text{Tang. } \left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right) = \text{Cot. } \omega \text{ Cot. } 3\omega \dots \text{Cot. } \left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right) = 1.$$

L'équation (A) peut être écrite ainsi

$$1 = 2^{\frac{2m-1}{2}} \cdot \text{Sin. } \frac{\pi}{4m} \text{ Sin. } \frac{3\pi}{4m} \text{ Sin. } \frac{5\pi}{4m} \dots \text{Sin. } \frac{(2m-1)\pi}{4m};$$

en y mettant pour  $m$  la valeur  $\frac{\pi}{4\omega}$ , et ayant égard à l'équation (D), elle devient

$$\frac{1}{2^{\frac{\pi-2\omega}{4\omega}}} = \text{Sin. } \omega \text{ Sin. } 3\omega \dots \text{Sin. } \left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right) = \text{Cos. } \omega \text{ Cos. } 3\omega \dots \text{Cos. } \left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right).$$

L'équation (II) divisée par  $\text{Sin. } \frac{x}{m}$  devient

$$\frac{\text{Sin. } x}{\text{Sin. } \frac{x}{m}} = 2^{m-1} \cdot \text{Sin. } \frac{\pi+x}{m} \text{ Sin. } \frac{2\pi+x}{m} \text{ Sin. } \frac{3\pi+x}{m} \dots \text{Sin. } \frac{(m-1)\pi+x}{m};$$

faisant, dans cette équation,  $x=0$ ; en remarquant qu'alors on doit avoir

$$\frac{\text{Sin. } x}{\text{Sin. } \frac{x}{m}} = m, \quad (*)$$

il viendra, en divisant par  $2^{m-1}$ ,

$$\frac{m}{2^{m-1}} = \text{Sin. } \frac{\pi}{m} \text{ Sin. } \frac{2\pi}{m} \text{ Sin. } \frac{3\pi}{m} \dots \text{Sin. } \frac{(m-1)\pi}{m};$$

posant alors  $\frac{\pi}{m} = \omega$ , d'où  $m = \frac{\pi}{\omega}$ , il viendra

$$\frac{2^{\frac{\pi}{\omega}-1}}{2^{\frac{\pi}{\omega}} \cdot \omega} = \text{Sin. } \omega \text{ Sin. } 2\omega \text{ Sin. } 3\omega \dots \text{Sin. } (\pi - \omega). \quad (\text{E})$$

(\*) Voyez mon *Traité de calcul différentiel et intégral*, art. 60.

Or, par l'hypothèse,  $m$  étant un nombre entier,  $\frac{\pi}{\omega}$  doit en être un aussi; c'est-à-dire, que  $\omega$  est un sous-multiple de  $\pi$ . Si, en outre, il est aussi un sous-multiple de  $\frac{1}{2}\pi$ , ce qui aura toujours lieu, dans la nouvelle division du cercle, toutes les fois que  $\omega$ , sous-multiple de  $\pi$ , ne sera pas  $8^\circ$  ou  $40^\circ$ ; la série (E) aura un nombre  $\frac{\pi}{\omega} - 1$  impair de facteur; et le  $\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\text{me}}$  facteur, qui sera le moyen entre tous, sera  $\text{Sin.}\frac{1}{2}\pi = 1$ ; de plus, les  $\frac{\pi}{2\omega} - 1$  facteurs situés à la droite de celui-là, seront respectivement égaux aux  $\frac{\pi}{2\omega} - 1$  facteurs situés à sa gauche, puisque la somme des arcs également distants des extrêmes et constamment égale à  $\pi$ . Donc, en extrayant la racine quarrée des deux membres de l'équation (E), il viendra

$$\sqrt{\frac{\frac{\pi}{\omega}}{2^{\frac{\pi}{\omega}-1}} \cdot \omega} \left\{ \begin{array}{l} = \text{Sin.}\omega \text{Sin.}2\omega \text{Sin.}3\omega \dots \text{Sin.}\left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right), \\ = \text{Cos.}\omega \text{Cos.}2\omega \text{Cos.}3\omega \dots \text{Cos.}\left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right); \end{array} \right.$$

d'où on tire encore les équations

$$1 \left\{ \begin{array}{l} = \text{Tang.}\omega \text{Tang.}2\omega \text{Tang.}3\omega \dots \text{Tang.}\left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right) \\ = \text{Cot.}\omega \text{Cot.}2\omega \text{Cot.}3\omega \dots \text{Cot.}\left(\frac{1}{2}\pi - \omega\right) \end{array} \right.$$

Si nous posons  $\omega = 1^\circ$ ; nous aurons

$$\sqrt{\frac{\frac{\pi}{\omega}}{2^{\frac{\pi}{\omega}-1}} \cdot \omega} = \sqrt{\frac{200}{2^{199}}} = \sqrt{\frac{400}{2^{200}}} = \frac{20}{2^{100}} = \frac{10}{2^{99}};$$

en passant donc aux logarithmes de Briggs, nous trouverons

$$\text{Log.Sin.}1^\circ + \text{Log.Sin.}2^\circ + \text{Log.Sin.}3^\circ + \dots + \text{Log.Sin.}99^\circ = 1 - 99^\circ \text{Log.}2, \quad (\text{F})$$

$$\text{Log.Tang.}1^\circ + \text{Log.Tang.}2^\circ + \text{Log.Tang.}3^\circ + \dots + \text{Log.Tang.}99^\circ = 0; \quad (\text{G})$$

mais si au rayon 1 on veut substituer le rayon 1 00000 00000, comme on le fait dans les tables trigonométriques, afin d'éviter les logarithmes négatifs, il faudra ajouter 99 dixaines au second membre

membre de l'équation (F); si de plus on veut pousser jusqu'à 100°, cette équation deviendra

$\text{Log.Sin.1}^\circ + \text{Log.Sin.2}^\circ + \text{Log.Sin.3}^\circ + \dots + \text{Log.Sin.100}^\circ = 1001 - 99 \text{Log.2}$ ,  
c'est-à-dire,

$\text{Log.Sin.1}^\circ + \text{Log.Sin.2}^\circ + \text{Log.Sin.3}^\circ + \dots + \text{Log.Sin.100}^\circ = 971, 1983$ .

Ainsi pour le rayon 1 00000 00000 et la division centésimale, le produit des sinus naturels de tous les degrés du quart de cercle est un nombre qui a 972 chiffres à sa partie entière.

Si  $\omega$ , sous-multiple de  $\pi$ , ne l'est pas de  $\frac{1}{2}\pi$ , ce qui aura lieu seulement, comme nous l'avons déjà observé, lorsque  $\omega$  sera égal à 40° ou à 8°; alors le second membre de l'équation (E) aura un nombre pair de facteurs; et sa première moitié, dont le dernier facteur sera  $\text{Sin.}\frac{1}{2}(\pi - \omega)$ , sera égale à la dernière, dont le premier facteur sera  $\text{Sin.}\frac{1}{2}(\pi + \omega)$ . Extrayant donc la racine quarrée des deux membres, il viendra

$$\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} - \omega} \cdot \omega} = \text{Sin.}\omega \text{Sin.}2\omega \text{Sin.}3\omega \dots \text{Sin.}\frac{1}{2}(\pi - \omega).$$

En faisant successivement  $\omega = 40^\circ$  et  $\omega = 8^\circ$ , on aura

$$\text{Sin.}40^\circ \text{Sin.}80^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{5};$$

$$\text{Sin.}8^\circ \text{Sin.}16^\circ \text{Sin.}24^\circ \text{Sin.}32^\circ \dots \text{Sin.}96^\circ = \frac{5}{4096}.$$