ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 104 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 222-231
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__222_1>

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 104 *de ce volume.*

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Énoncé. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3,..... m, *dont il en sort* n *à chaque tirage ; quelle probabilité y a-t-il que, parmi les* n *numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas* k *nombres consécutifs de la suite naturelle* ?

Soit une loterie composée de m numéros, dont on en tire un nombre proposé n. On a déjà assigné le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a deux qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un ambe successif. (*)

Soit une loterie composée de m numéros, dont on en tire un nombre proposé n. On demande le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a trois qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un terne successif ?

Je vais d'abord introduire à la résolution de cette question par des exemples.

I. Que le nombre des numéros extraits soit *trois* ; le nombre des ternes successifs est évidemment $m-2$.

II. Que le nombre des numéros extraits soit *quatre.*

1.° Que le numéro un soit tiré, avec les deux numéros suivans.

(*) Voyez la page 62 de ce volume.

A ce terne successif peuvent se joindre, un à un, chacun des $m-3$ numéros restans. Le nombre des cas est $m-3$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Les $m-3$ numéros restans, dont on tire deux, ne donnent pas lieu à des ternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire trois; ils donnent lieu à $m-4$ ternes successifs.

Raisonnant de même sur les numéros suivans, quant à leur combinaison avec les numéros qui les suivent, on trouve que le nombre des ternes successifs, auxquels donne lieu l'extraction de quatre numéros, est la somme des $m-3$ et des $m-4$ premiers nombres naturels, savoir :

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}=(m-3)^2$$

III. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans. A ce terne successif peuvent se joindre, deux à deux les $n-3$ numéros restans. Le nombre des cas est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros, dont on en tire trois. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-3$ numéros donnent lieu est $m-5$.

3.° Que le numéro un soit extrait sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire quatre. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu, est $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}$ $+\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{2}$.

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros est la somme des $m-5$ premiers nombres naturels, et celle des $(m-6)^{me}$, $(m-5)^{me}$ et $(m-4)^{me}$ premiers nombres triangulaires. Ce nombre est donc

$$\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3}.$$

IV. Que le nombre des numéros extraits soit *six*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros qui le suivent. A ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans, pris trois à trois; le nombre des cas est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $n-3$ numéros dont on en tire quatre. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $n-3$ numéros donnent lieu est $\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$.

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire cinq. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de six numéros, est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-2}{4}$$
$$+2.\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}.$$

V. Que le nombre des numéros extraits soit *sept.*

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros qui le suivent. A ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans, pris quatre à quatre. Le nombre des cas, est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on en tire cinq. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-3$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire six. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$
$$+2.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}.$$

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros, est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-2}{5}$$

$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$

$$+3.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$

$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}.$$

Ces exemples paraissent suffire pour indiquer la voie à suivre dans cette recherche, et pour montrer que le cas proposé, sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux deux cas dans lesquels le nombre des numéros extraits est inférieur d'une et de deux unités.

Soit une loterie composée de m numéros, dont on tire un nombre proposé n. On demande le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a quatre qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un quaterne successif ?

Je vais encore introduire à la marche de cette recherche par des exemples.

I. Que le nombre des numéros extraits soit *quatre* ; le nombre des quaternes successifs est évidemment $m-3$.

II. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros restans pris, un à un. Le nombre des cas est $m-4$.

2.° Les numéros un et deux étant tirés sans aucun des deux suivans. Les numéros suivans, dont on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs.

3.° Le numéro un étant tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire quatre. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces numéros donnent lieu est $m-5$.

De là, le nombre des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros, est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}=(m-4)^2.$$

III. Que le nombre des numéros extraits soit *six*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris deux à deux. Le nombre des cas est $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec les suivans deux et trois sans le numéro quatre. Les $m-4$ numéros suivans, dont on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs.

3.° Que les numéros un et deux soient tirés sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on en tire quatre. Ils donnent lieu à $m-6$ quaternes successifs.

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire cinq. Le nombre des quaternes successifs auxquels ils donnent lieu est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}=(m-6)^2.$$

Partant, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de six numéros est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

IV. Que le nombre des numéros extraits soit *sept.*

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans pris trois à trois. Le nombre des cas est $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans, sans le numéro quatre. Il reste $m-4$ numéros dont on tire quatre, et qui donnent lieu à $m-7$ quaternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on tire cinq. Ils donnent lieu à $\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}$ quaternes successifs.

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire six. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}.$$

De là, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros est

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$

$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$

$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

V. Que le nombre des numéros extraits soit *huit*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris quatre à quatre. Le nombre des cas est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}.$$

2.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans, sans le numéro quatre. Il reste $m-4$ numéros dont on tire cinq, et qui donnent lieu à $\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}$ quaternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on tire six. Le nombre des quaternes successifs auxquels ils donnent lieu est

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$

$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}$$

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire sept. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+2\cdot\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}$$
$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4}.$$

De là, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de huit numéros est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$
$$+3\cdot\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+2\cdot\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$
$$+3\cdot\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}$$
$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4}\cdot\frac{m-7}{5}.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer la voie à suivre dans cette recherche; et pour montrer que le cas proposé, sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux trois cas dans lesquels les nombres de numéros extraits sont inférieurs d'une, de deux et de trois unités.

Qu'on s'occupe des quines successifs. On montre de même que le cas proposé, sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux quatre cas dans lesquels les nombres des numéros extraits sont inférieurs d'une, de deux, de trois et de quatre unités, etc., etc. (*)

(*) En lisant ceci, on apercevra sans peine que, dans la vue d'abréger, M. Lhuilier a supprimé beaucoup d'intermédiaires; mais ils seront faciles à rétablir, si auparavant on prend la peine de relire ce qui se trouve à la page 62 de ce volume.

M. Ferriot, docteur ès sciences, professeur au lycée de Besançon, a aussi fourni, du même problème, une solution parvenue trop tard pour pouvoir trouver place dans le recueil.

J. D. G.