DU BOURGUET
CARDINALI
LANJUINAIS
LE GRAND

Questions résolues. Solutions du problème d'analise indéterminée, proposé à la page 140 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 241-243
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__241_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'analise indéterminée, proposé à la page 140 de ce volume;

Par MM. Du Bourguet, S..., Cardinali, Lanjuinais et Le Grand.

Enoncé. On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des trois derniers par la somme des deux du milieu, on obtienne un produit égal au cube d'un moyen arithmétique entre les deux premiers de ces quatre nombres?

La difficulté de ce problème paraît consister principalement en ce que, s'élevant naturellement au troisième degré, il faut le rabaisser au second. C'est, en effet, ce qu'ont fait M. Du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial, M. S..., et M. Le Grand, élève de l'école normale; MM. Cardinali, professeur à Trévise, et Lanjuinais, professeur à Rodez, l'ont traité par des méthodes indirectes : mais MM. Du Bourguet et Le Grand sont les seuls qui se soient proposés d'en assigner toutes les solutions ; ils ont trouvé, le premier, qu'elles étaient au nombre de trois, et le second, qu'elles étaient au nombre de quatre ; mais on peut dire qu'elles sont réellement au nombre de cinq, comme nous allons le faire voir, en suivant à peu près l'analise de M. Du Bourguet.

Solution. Soient $2x$ le premier terme, et $2y$ la raison de la progression ; ses quatre termes seront

$$\div 2x \,.\, 2x+2y \,.\, 2x+4y \,.\, 2x+6y \;;$$

et l'on devra avoir, par l'énoncé du problème,

$$(6x+12y)(4x+6y)=(2x+y)^3.$$

Posant $2x+y=z$, d'où $2x=z-y$, cette équation deviendra

$$(2z+4y)(3z+9y)=z^3\,,$$

ou, en posant $6y=t$ et développant

$$t^2+5zt+(6-z)z^2=0\,;$$

d'où

$$t=z.\frac{-5\pm\sqrt{4z+1}}{2}.$$

Soit fait $\pm\sqrt{4z+1}=u$, d'où $4z+1=u^2$ et $z=\frac{u^2-1}{4}$; donc

$$t=\frac{(u^2-1)(u-5)}{8}\,;$$

et

$$y=\frac{(u^2-1)(u-5)}{48}\,,\qquad x=\frac{(u^2-1)(17-u)}{96}.$$

Par l'inspection de ces valeurs, on voit évidemment que u ne peut être qu'un nombre impair ; posant donc $u=2v+1$, il viendra enfin

$$x=\frac{v(v+1)(8-v)}{12}\,,\qquad y=\frac{v(v+1)(v-2)}{6}.$$

La nécessité d'avoir x positif renferme les valeurs de v entre -1 et $+8$; mais, attendu que les valeurs $+1$, $+4$, $+5$, $+7$ de v rendent x fractionnaire, on ne peut admettre que les six systèmes que voici :

$$\left\{\begin{array}{l} v=-1\,, \\ x=0\,, \\ y=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v=0\,, \\ x=0\,, \\ y=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v=2\,, \\ x=3\,, \\ y=0\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v=3\,, \\ x=5\,, \\ y=2\,; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v=6\,, \\ x=7\,, \\ y=28\,, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} v=8\,, \\ x=0\,, \\ y=72\,; \end{array}\right.$$

et, puisque les valeurs -1 et 0 de v donnent les mêmes valeurs pour x et y, le problème n'a réellement que les cinq solutions suivantes :

$$\begin{array}{l} \div\ 0\,.\ 0\,.\ 0\,.\ 0\,, \\ \div\ 6\,.\ 6\,.\ 6\,.\ 6\,, \\ \div\ 10\,.\ 14\,.\ 18\,.\ 22\,, \\ \div\ 14\,.\ 70\,.\ 126\,.\ 182\,, \\ \div\ 0\,.\ 144\,.\ 288\,.\ 432\,. \end{array}$$