ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DE STAINVILLE

Analise. Mémoire sur les fractions rationnelles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 279-286
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__279_1>

ANALISE.

Mémoire sur les fractions rationnelles ;

Par M. DE STAINVILLE, répétiteur adjoint à l'école impériale polytechnique.

LA décomposition des fractions rationnelles, qui se présente si souvent dans la théorie des suites, et dans le calcul intégral, a été présentée, par les analistes, de plusieurs manières diverses. En particulier on y a appliqué le calcul différentiel ; mais cette application ne me paraît pas avoir été présentée sous le point de vue le plus simple et le plus lumineux ; et c'est ce qui me détermine à y revenir ici.

Je considérerai successivement, dans ce mémoire, trois sortes de fractions rationnelles, savoir 1.° celles dont le dénominateur a tous ses facteurs inégaux ; 2.° celles dont le dénominateur a tous ses facteurs égaux ; 3.° celles dont le dénominateur a ses facteurs en partie égaux et en partie inégaux.

I. Soit, en général, $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur φx, d'un degré plus élevé que le numérateur, soit le produit des facteurs inégaux $x-a$, $x-b$, $x-c$, ...; en designant par A,

B, C,.... les numérateurs des fractions partielles qui doivent respectivement avoir ces facteurs pour dénominateurs ; on aura

$$\frac{\psi x}{\phi x}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

d'où on conclura, en chassant les dénominateurs, et se rappelant que $\varphi x=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$

$$\begin{aligned}\psi x=&A(x-b)(x-c)\ldots\ldots\\&+B(x-a)(x-c)\ldots\ldots\\&+C(x-a)(x-b)\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cette équation étant identique, elle devra subsister encore, en y mettant successivement pour x les quantités a, b, c,....; observant donc que chacune de ces substitutions fait disparaître tous les termes du second membre, excepté un seul, il viendra

$$\begin{aligned}\psi a&=A(a-b)(a-c)\ldots\ldots,\\\psi b&=B(b-a)(b-c)\ldots\ldots,\\\psi c&=C(c-a)(c-b)\ldots\ldots,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'un autre côté, en différentiant l'équation identique

$$\varphi x=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots,$$

on obtient cette autre équation identique

$$\begin{aligned}\varphi' x=&(x-b)(x-c)\ldots\ldots\\&+(x-a)(x-c)\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+(x-a)(x-b)\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

laquelle, en y mettant successivement pour x les seconds termes a, b, c, ..., donne

$$\varphi'a=(a-b)(a-c)\ldots\ldots$$
$$\varphi'b=(b-a)(b-c)\ldots\ldots$$
$$\varphi'c=(c-a)(c-b)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

divisant donc, par chacune de ces dernières, les équations correspondantes du précédent groupe, il viendra

$$\frac{\psi a}{\varphi' a}=A\ ,\quad \frac{\psi b}{\varphi' b}=B\ ,\quad \frac{\psi c}{\varphi' c}=C\ ,\ldots.$$

Ainsi, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit le même que celui de la fraction proposée, et dont le dénominateur soit la fonction prime de son dénominateur; en substituant successivement pour x, dans cette fraction, les seconds termes des dénominateurs des fractions partielles, pris avec des signes contraires, on obtiendra les numérateurs de

Soit, par exemple, la fraction

çes mêmes fractions.

$$\frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}\ ;$$

le numérateur, divisé par la fonction prime du dénominateur, donnera

$$\frac{6x^2-22x+18}{3x^2-12x+11}\ ;$$

en y faisant successivement $x=1$, 2, 3, on obtiendra $\frac{2}{2}=1$, $\frac{-2}{-1}=2$, $\frac{6}{2}=3$; de sorte qu'on aura

$$\frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

On voit par là que, dans le cas particulier où le numérateur de la fraction proposée se trouverait etre la fonction prime de son dénominateur, les numérateurs des fractions partielles se trouveraient tous égaux à l'unité, comme il résulte d'ailleurs de la théorie des différentielles logarithmiques.

II. Soit encore $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible, dont le dénominateur soit d'un degré plus élevé que le numérateur; mais supposons que ce dénominateur soit le produit de m facteurs égaux à $x-a$, en sorte qu'on ait $\varphi x=(x-a)^m$; on pourra alors écrire l'équation identique

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\psi\{a+(x-a)\}}{(x-a)^m}.$$

En développant le second membre de cette équation, par la *série de Taylor*, on obtiendra

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\psi a}{(x-a)^m}+\frac{\frac{1}{1}\psi' a}{(x-a)^{m-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\psi'' a}{(x-a)^{m-2}}+\ldots+\frac{\frac{1}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}a}{(x-a)^{m-n}}+\ldots$$

D'où l'on voit que le numérateur d'une fraction partielle quelconque s'obtiendra, en formant une dérivée du numérateur de la fraction proposée dont l'ordre soit la différence entre l'exposant du dénominateur de la même fraction proposée et l'exposant du dénominateur de la fraction partielle dont il s'agit, en divisant ensuite cette fonction dérivée par le produit d'autant des premiers nombres naturels qu'il y a d'unités dans le nombre qui indique son ordre de dérivation, et en y mettant enfin pour x le second terme a du binôme $x-a$.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{3x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{3x^2-4x+2}{(x-1)^3}.$$

Le numérateur et ses dérivées successives, divisées respectivement par 1 et 2, sont

$$3x^2-4x+2\ ,\qquad 6x+4\ ,\qquad 3\ ;$$

en y faisant $x=1$, il vient

$$1\ ,\qquad 2\ ,\qquad 3\ ;$$

et on a conséquemment

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

III. Soit enfin $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible, dont le dénominateur, d'un degré plus élevé que son numérateur, n'ait ni tous ses facteurs égaux ni tous ses facteurs inégaux. Soit $\varphi x=(x-a)^m \mathrm{f}x$; la fonction $\mathrm{f}x$ pouvant renfermer ou ne point renfermer de facteurs égaux, mais n'en renfermant aucun qui soit égal à $x-a$. Soit posé

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\mathrm{F}x}{(x-a)^m}+\frac{\Phi x}{\mathrm{f}x}.$$

Si l'on pouvait déterminer les fonctions $\mathrm{F}x$ et Φx, le problème qui nous occupe pourrait être considéré comme résolu, puisque la décomposition de la première fraction du second membre se rapporterait au second cas que nous avons traité, et que la décomposition de l'autre se rapporterait soit au premier soit au cas présent, suivant que les facteurs de $\mathrm{f}x$ seraient ou ne seraient pas tous inégaux.

Au lieu de déterminer immédiatement $\mathrm{F}x$, il serait préférable de chercher d'abord $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}'a$, $\mathrm{F}''a$, ...; car, outre qu'il serait facile d'en déduire $\mathrm{F}x$, ainsi que nous le verrons tout-à-l'heure, la décomposition de la première fraction du second membre se trouverait ainsi exécutée.

Si, dans notre équation, on chasse les dénominateurs; et, qu'après avoir changé x en $a+y$, on développe par la *série de Taylor*, il viendra

$$\psi a+\frac{y}{1}\psi' a+\frac{y^2}{1.2}\psi'' a+\ldots\ldots=$$

$$\mathrm{F}a+\frac{y}{1}\mathrm{F}'a+\frac{y^2}{1.2}\mathrm{F}''a+\ldots\}\{\mathrm{f}a+\frac{y}{1}\mathrm{f}'a+\frac{y^2}{1.2}\mathrm{f}''a+\ldots\}$$

$$+y^m\{\Phi a+\frac{y}{1}\Phi' a+\frac{y^2}{1.2}\Phi'' a+\ldots\ldots\}$$

d'où, en comparant les puissances semblables de y

$$\psi a=\mathrm{f}a\mathrm{F}a;$$

$$\psi' a=\mathrm{f}a\mathrm{F}'a+\mathrm{f}'a\mathrm{F}a,$$

$$\psi'' a=\mathrm{f}a\mathrm{F}''a+2\mathrm{f}'a\mathrm{F}'a+\mathrm{f}''a\mathrm{F}a;$$

et, en général

$$\psi^{(n)}a=\mathrm{f}a\mathrm{F}^{(n)}a+\frac{n}{1}\mathrm{f}'a\mathrm{F}^{(n-1)}a+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\mathrm{f}''a\mathrm{F}^{(n-2)}a+\ldots,$$

pourvu que n soit moindre que m. Or, comme ψx et fx sont connus, on aura facilement ψa, $\psi' a$, ψ'', ..., $\mathrm{f}a$, $\mathrm{f}'a$, $\mathrm{f}''a$, ...; on n'aura donc d'inconnues, dans les équations ci-dessus, que $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}'a$, $\mathrm{F}''a$, ..., qu'elles serviront à déterminer. Il viendra alors

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}\{a+(x-a)\}=\mathrm{F}a+\frac{x-a}{1}\mathrm{F}'a+\frac{(x-a)^2}{1.2}\mathrm{F}''a+\ldots;$$

et ensuite

$$\Phi x=\frac{\psi x-\mathrm{f}x\mathrm{F}x}{(x-a)^m}.$$

Soit

Soit proposée, pour exemple, la fraction

$$\frac{9x^6-94x^5+383x^4-787x^3+891x^2-576x+192}{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x-4)}.$$

Nous aurons ici

$$\psi x=9x^6-94x^5+383x^4-787x^3+891x^2-576x+192 ;$$

$$\varphi x=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x-4) ,$$

$$a=1$$

$$\mathrm{f}x=(x-1)^2(x-3)(x-4)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48 ;$$

donc

$$\psi' x=54x^5-470x^4+1532x^3-2361x^2+1782x-576 ;$$

$$\psi'' x=270x^4-1880x^3+4596x^2-4722x+1782 ,$$

$$\mathrm{f}' x=4x^3-33x^2+88x-76 ,$$

$$\mathrm{f}'' x=12x^2-66x+88 ,$$

et par conséquent

$$\psi a=18 , \quad \psi' a=-39 , \quad \psi'' a=46 ,$$

$$\mathrm{f}a= 6 , \quad \mathrm{f}' a=-17 , \quad \mathrm{f}'' a=34 ;$$

donc

$$18=6\mathrm{F}\,a ,$$

$$-39=6\mathrm{F}'a-17\mathrm{F}\,a ,$$

$$46=6\mathrm{F}''a-34\mathrm{F}'a+34\mathrm{F}a ;$$

et de là

$$\mathrm{F}a=3 , \quad \mathrm{F}'a=2 , \quad \mathrm{F}''a=2.$$

Donc

$$\mathrm{F}x=3+2(x-1)+(x-1)^2=x^2+2 ;$$

$$\mathrm{f}x\mathrm{F}x=x^6-11x^5+46x^4-98x^3+136x^2-152x+96 ,$$

$$\psi x-\mathrm{f}x\mathrm{F}x=8x^6-83x^5+337x^4-689x^3+755x^2-424x+96 ,$$

$$\Phi x = \frac{\psi x - fx Fx}{(x-a)^m} = 8x^3 - 59x^2 + 136x - 96\ ;$$

donc enfin

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{8x^3 - 59x^2 + 136x - 96}{(x-2)^2(x-3)(x-4)}.$$

On décomposera la dernière fraction, en lui appliquant le même procédé.