ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

Géométrie analitique. Démonstration de quelques propriétés des pôles des lignes et surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 302-307

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__302_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Démonstration de quelques propriétés des pôles des lignes et surfaces du second ordre ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

§. I.

On sait qu'une ligne du second ordre (L) étant donnée ; si on la rapporte à deux axes respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, son équation prend la forme

$$ax^2+by^2+dx+ey=0\ ; \qquad (\mathrm{L})$$

on sait, de plus, qu'en prenant un pôle (P) dont les coordonnées soient g et h, la polaire (Q), correspondant à ce pôle, a pour équation

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+dg+eh=0. \quad (*) \qquad (\mathrm{Q})$$

Si, dans les équations (L) et (Q), on suppose $e=0$, elles deviendront

$$ax^2+by^2+dx=0\quad , \qquad (2ag+d)x+2bhy+dg=0\ ;$$

l'axe des x sera alors un diamètre de la courbe, et l'axe des y sera une parallèle quelconque à son conjugué.

Les choses étant ainsi, si l'on veut que la droite (Q) soit parallèle à l'axe des y, il faudra que le terme en y disparaisse de son équation; on devra donc avoir $h=0$; et réciproquement, toutes les fois que h sera nul, quel que soit d'ailleurs g, la droite (Q) deviendra parallèle à l'axe des y. De là résulte le théorème suivant;

THÉORÈME. Toute droite située sur le plan d'une ligne du second ordre, a son pôle situé sur le conjugué du diamètre auquel cette droite est parallèle; et réciproquement.

Donc, *si une droite se meut parallèlement à elle-même, sur le plan d'une ligne du second ordre, son pôle sera mû suivant le conjugué du diamètre auquel elle demeurera constamment parallèle; et réciproquement.*

(*) Voyez le précédent mémoire. On a cru devoir adopter les mêmes notations, dans l'un et dans l'autre, afin d'en rendre le rapprochement plus facile.

J. D. G.

Dans le cas particulier où la courbe est une parabole, la supposition $e=0$ entraîne $a=0$; en supposant donc toujours $h=0$, l'équation de (Q) se réduit à $x=-g$; ce qui prouve que, *dans la parabole la portion du diamètre comprise entre la droite et son pôle est coupée en deux parties égales par la courbe.*

Du théorème qui vient d'être démontré, on peut conclure le suivant :

THÉORÈME. Le point de concours de deux tangentes quelconques à une ligne du second ordre est sur le conjugué du diamètre auquel la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes est parallèle.

Il suit évidemment de la nature des pôles des lignes du second ordre que, si deux droites, tracées sur le plan d'une pareille ligne, sont telles que la seconde passe par le pôle de la première, la première passera réciproquement par le pôle de la seconde. Si donc la seconde tourne autour du pôle de la première, son pôle sera mû suivant cette première. De là résulte encore cet autre théorème :

THÉORÈME. Si une droite, tracée sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut autour d'un point fixe, pris comme on voudra, sur sa direction, son pôle sera mû suivant une parallèle au conjugué du diamètre mené à la courbe par ce point fixe ; et réciproquement.

§. II.

On sait qu'une surface (S) du second ordre étant donnée ; si on la rapporte à trois axes respectivement parallèles à trois diamètres conjugués, son équation prendra la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz=0 ; \qquad (S)$$

on sait, de plus, qu'en prenant un pôle (P) dont les coordonnées soient g, h, k, le plan polaire (Q), correspondant à ce pôle, a pour équation

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+(2ck+f)z+dg+eh+fk=0\ ; \quad (*) \quad (Q)$$

Si l'on suppose d et e égaux à zéro, les équations (S) et (Q) deviendront

$$ax^2+by^2+cz^2+fz=0\ , \quad 2agx+2bhy+(2ck+f)z+fk=0.$$

Les deux diamètres auxquels les axes des x et des y seront alors parallèles, auront pour leur conjugué l'axe des z.

Les choses étant dans cet état, si l'on veut que le plan (Q) soit parallèle à celui des xy, il faudra que les termes en x et en y disparaissent de son équation ; on devra donc avoir $g=0$, $h=0$; réciproquement toutes les fois que g et h seront nuls, quel que soit d'ailleurs k, le plan (Q) deviendra parallèle au plan des xy. De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Lorsque trois diamètres d'une surface du second ordre sont conjugués, tout plan parallèle à celui de deux de ces diamètres a son pôle sur le troisième ; et réciproquement.

Donc, *si un plan se meut parallèlement à lui-même, son pôle sera mû suivant le diamètre qui joint les points de contact des deux plans tangens parallèles à la direction constante de celui-là.*

Dans le cas particulier où la surface est un paraboloïde, la supposition $d=0$, $e=0$ entraîne $c=0$; en supposant donc toujours $g=0$, $h=0$, l'équation de (Q) se réduit à $z=-f$; ce qui prouve que, *dans le paraboloïde, la portion du diamètre comprise entre le plan et son pôle est coupée en deux parties égales par cette surface.*

J. D. G.

(*) Voyez le précédent mémoire.

Du théorème qui vient d'être démontré on peut conclure le suivant.

THÉORÈME. Le sommet de la surface conique circonscrite à une surface du second ordre est sur un diamètre tel que les plans tangens à ses extrémités sont parallèles au plan de la ligne de contact.

Il suit évidemment de la nature des pôles des surfaces du second ordre que, si deux plans sont tels que le second passe par le pôle du premier, le premier passera réciproquement par le pôle du second ; si donc le second tourne autour du pôle du premier, son pôle sera continuellement dans ce premier plan. De là résulte encore cet autre théorème :

THÉORÈME. Un plan tournant autour d'un point fixe, situé d'une manière quelconque par rapport à une surface du second ordre, son pôle ne sort pas d'un plan parallèle aux plans qui toucheraient cette surface aux deux extrémités du diamètre mené par ce point fixe; et réciproquement.

On voit, d'après cela, que, si un plan tourne à la fois autour de deux points fixes, auquel cas il tournera autour d'une droite fixe passant par ces deux points; son pôle ne sortira pas de deux plans fixes, et décrira conséquemment la droite qui est l'intersection de ces deux plans. Cette droite sera parallèle à l'intersection des plans tangens aux points de la surface courbe où elle est rencontrée par les diamètres qui passent par les deux points fixes. Nous appellerons la droite décrite par le pôle, dans ce cas, la *polaire* de celle autour de laquelle tourne le plan auquel ce pôle appartient.

Examinons présentement les diverses directions que prend cette polaire suivant les diverses situations de la droite à laquelle elle correspond. Supposons que le plan (Q) soit assujetti à passer constamment par une droite (M), ayant pour ses deux équations

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda\ , \qquad \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\lambda'\ ; \qquad \text{(M)}$$

on exprimera cette circonstance en exprimant que l'élimination de x et y, entre ces deux équations et celle de (Q), conduit à une équation qui laisse z indéterminée; cette équation en z est

$$\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(2ag+d)+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(2bh+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(2ck+f)\}z$$
$$+(\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ag+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2bh+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dg+eh+fk)=0\,;$$

égalant donc à zéro le coefficient de z et le terme tout connu, en changeant g, h, k en x, y, z, les équations de la polaire (N) de (M) seront

$$\left.\begin{array}{r}(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(2ax+d)+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(2cz+f)=0\,,\\ (\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ax+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dx+ey+fz)=0\,.\end{array}\right\}\text{(N)}$$

Si l'axe des z est un diamètre, et que (M) soit parallèle au plan des xy, on aura $d=0$, $e=0$, $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$; les équation de (N) deviendront donc

$$a(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+b(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)y=0\,,\quad a(\beta'\lambda-\beta\lambda')x+b(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)y=0\,;$$

d'où l'on voit que cette droite (N) passera alors par l'axe des z.

Si le plan des xy est un plan diamètre et que (M) soit parallèle à l'axe des z, on aura $f=0$, $\beta\gamma'-\beta'\gamma=0$, $\gamma\alpha'-\gamma'\alpha=0$; les équations de (N) deviendront donc

$$z=0\,,\quad(\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ax+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dx+ey)=0\,;$$

d'où l'on voit que cette droite (N) sera alors sur le plan des xy. De là résultent ces deux théorèmes :

THÉORÈME. Trois diamètres d'une surface du second ordre étant conjugués; si une droite est parallèle au plan de deux de ces diamètres, sa polaire passera par le troisième; et réciproquement.

THÉORÈME. Trois diamètres d'une surface du second ordre étant conjugués; toute parallèle à l'un d'eux a sa polaire dans le plan des deux autres; et réciproquement.