GERGONNE

Fonctions circulaires. Développemens, en séries, des sinus et cosinus suivant l'arc, et de l'arc suivant sa tangente

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 344-346
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__344_1>

FONCTIONS CIRCULAIRES.

Développemens, en séries, des sinus et cosinus suivant l'arc, et de l'arc suivant sa tangente;

Par M. Gergonne.

I. Le sinus d'un arc variant de signe avec cet arc, sans varier de grandeur absolue; on est autorisé à supposer

$$\text{Sin}.x=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\ldots\ldots; \qquad (1)$$

et conséquemment

$$\text{Sin}.y=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\ldots\ldots; \qquad (2)$$

$$\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y)=A[\tfrac{1}{2}(x-y)]+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^3+\ldots \qquad (3)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$\text{Sin}.x-\text{Sin}.y=2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y),$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$, et, en exécutant la division, il viendra

$$\{A+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^2+C[\tfrac{1}{2}(x-y)]^4+\ldots\}\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=$$
$$A+B(x^2+xy+y^2)+C(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)+\ldots.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $y=x$, elle se réduira à

$$A\text{Cos}.x=A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+\ldots\ldots; \qquad (4)$$

on aura donc aussi

$$A\text{Cos}.y=A+3By^2+5Cy^4+7Dy^6+\ldots\ldots \qquad (5)$$

substituant les valeurs de $\text{Cos}.x$ et $\text{Cos}.y$, données par ces deux équations, ainsi que celle de $\text{Sin}.\frac{1}{2}(x-y)$, donnée par l'équation (3), dans l'équation

$$\text{Cos}.y-\text{Cos}.x=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y),$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$, et, en exécutant la division, il viendra

$$A\{A+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^2+C[\tfrac{1}{2}(x-y)]^4+\ldots\}\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)=$$
$$-3B(x+y)-5C(x^3+x^2y+xy^2+y^3)-\ldots\ldots$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $y=x$, elle deviendra

$$A^2\text{Sin.}x=-2.3Bx-4.5Cx^3-6.7Dx^5-\ldots\ldots;$$

mais l'équation (1) donne

$$A^2\text{Sin.}x=A^3x+A^2Bx^3+A^2Cx^5+\ldots\ldots;$$

on aura donc

$$-2.3B=A^3\ ,\quad -4.5C=A^2B\ ,\quad -6.7D=A^2C\ ,\ldots$$

et par conséquent

$$B=-\frac{A^3}{1.2.3}\ ,\quad C=+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}\ ,\quad D=-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}\ ,\ldots\ldots;$$

donc enfin (1 et 4)

$$\text{Sin.}x=\frac{Ax}{1}-\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\frac{A^5x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{A^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots.$$
$$\text{Cos.}x=1-\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^4x^4}{1.2.3.4}-\frac{A^6x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots.$$

Il est d'ailleurs facile de prouver que la constante A doit être égale à l'unité. (*)

II. La tangente d'un arc variant aussi de signe avec cet arc, sans varier de grandeur absolue; on est autorisé à supposer

$$x=A\text{Tang.}x+B\text{Tang.}^3x+C\text{Tang.}^5x+\ldots\ldots; \qquad (6)$$

on aura donc aussi

$$y=A\text{Tang.}y+B\text{Tang.}^3y+C\text{Tang.}^5y+\ldots.; \qquad (7)$$
$$x-y=A\text{Tang.}(x-y)+B\text{Tang.}^3(x-y)+\ldots. \qquad (8)$$

Si l'on égale la valeur de $x-y$ donnée par les équations (6 et 7) à celle que donne l'équation (8), en mettant en évidence le facteur $\text{Tang.}x-\text{Tang.}y$, qui affecte l'un des membres de l'équation résultante, il viendra

$$(\text{Tang.}x-\text{Tang.}y)\{A+B(\text{Tang.}^2x+\text{Tang.}x\text{Tang.}y+\text{Tang.}^2y)+\ldots\}$$
$$=\text{Tang}(x-y)\{A+B\text{Tang.}^2(x-y)+C\text{Tang.}^4(x-y)+\ldots.\};$$

mais on a

(*) Voyez la *Théorie des fonctions analitiques*.

$$\text{Tang}\,x-\text{Tang}.y=(1+\text{Tang}.x\text{Tang}.y)\text{Tang}.(x-y)\ ,$$

substituant donc, et supprimant le facteur commun $\text{Tang}.(x-y)$, on aura

$$(1+\text{Tang}.x\text{Tang}.y)\{A+B(\text{Tang}.^2x+\text{Tang}.x\text{Tang}.y+\text{Tang}.^2y)+\ldots\}$$
$$=A+B\text{Tang}.^2(x-y)+C\text{Tang}.^4(x-y)+\ldots.\ ;$$

posant alors $y=x$, cette équation deviendra simplement

$$A=(1+\text{Tang}.^2x)\{A+3B\text{Tang}.^2x+5C\text{Tang}.^4x+\ldots.\}\ ;$$

ou, en développant,

$$A=A+3B\left|\text{Tang}.^2x+5C\right|\text{Tang}.^4x+7D\left|\text{Tang}.^6x+\ldots;\right.$$
$$\quad +\ A\quad\Big|\qquad +3B\quad\Big|\qquad +5C\quad\Big|$$

donc

$$3B+A=0\ ,\quad 5C+3B=0\ ,\quad 7D+5C=0,\ldots\ ;$$

d'où

$$B=-\tfrac{1}{3}A\ ,\quad C=+\tfrac{1}{5}A\ ,\quad D=-\tfrac{1}{7}A,\ldots\ ;$$

donc enfin (6)

$$x=A(\text{Tang}.x-\tfrac{1}{3}\text{Tang}.^3x+\tfrac{1}{5}\text{Tang}.^5x-\ldots.)\ ;$$

on parviendra d'ailleurs facilement à s'assurer que la constante A doit être égale à l'unité.