LHUILIER

Questions résolues. Solutions du problème d'alliage proposé à la page 287 du deuxième volume des Annales. Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 34-37
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__34_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'alliage proposé à la page 287 du deuxième volume des Annales.

ÉNONCÉ. *Deux vases* A *et* B, *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis, l'un et l'autre, d'un mélange d'eau et de vin dont la proportion est connue pour chaque vase. On a deux mesures égales, dont la contenance commune est* c, *et que l'on plonge en même temps dans les deux vases pour les remplir; après quoi on verse dans chaque vase le liquide tiré de l'autre. On réitère la même opération* n *fois successivement. On demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase?*

Première solution;

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Soient X, X', X'', les quantités d'eau qui se trouvent rester dans le vase A, après trois opérations consécutives quelconques, et Y, Y', Y'' les quantités d'eau correspondantes qui se trouvent dans le vase B.

Par l'opération qui fait passer les quantités d'eau des deux vases de X et Y à X' et Y' on extrait, savoir :

de A une quantité d'eau exprimée par $\frac{c}{a}X$,

de B une quantité d'eau exprimée par $\frac{c}{b}Y$;

on aura donc

$$X'=X-\frac{c}{a}X+\frac{c}{b}Y\;;$$

et on aura pareillement

$$X''=X'-\frac{c}{a}X'+\frac{c}{b}Y'\;;$$

on a d'ailleurs

$$X+Y=X'+Y'\;;$$

éliminant donc Y et Y' entre ces trois équations, il viendra

$$X''=\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X'-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X\;;$$

partant, les quantités d'eau successives contenues dans le premier vase forment une suite récurrente du second ordre, dont l'échelle de relation est

$$+\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right),\quad -\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)\;;$$

cette suite récurrente provient donc du développement d'une fraction dont le dénominateur est

$$1-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x^2\,,$$

c'est-à-dire,

$$(1-x)\left\{1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x\right\}\ ;$$

ou, ce qui revient au même, du développement de la somme de deux fractions de la forme

$$\frac{M}{1-x}\ ,\qquad \frac{N}{1-\left(1-\dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}\right)x}\ ;$$

or, les termes généraux correspondans de ces développemens sont

$$Mx^n \quad \text{et} \quad N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n x^n\ ;$$

partant

$$X=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n\ ;$$

M et N étant deux constantes qu'il s'agit présentement de déterminer d'après l'état initial du mélange dans les deux vases.

Soient α et β les quantités d'eau qui se trouvaient respectivement dans les deux vases A et B, avant la première opération ; après cette première opération il se trouvera dans le vase A une quantité d'eau exprimée par

$$\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta\ ;$$

ainsi il faut qu'en faisant successivement

$$\left.\begin{array}{l} n=0\ , \\ n=1\ , \end{array}\right\}\ \text{on ait}\ \left\{\begin{array}{l} X=\alpha\ , \\ X=\alpha-\dfrac{c}{a}\alpha+\dfrac{c}{b}\beta\ ; \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha=M+N\ ,$$

$$\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)\ ;$$

de là

$$M=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}\,,\quad N=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\,;$$

et partant

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n.$$

De là on déterminera le moment (s'il est possible) où les quantités d'eau contenues dans les deux vases seront entre elles dans un rapport donné, où celui auquel la quantité d'eau contenue dans l'un de ces vases sera égale à une quantité donnée.

Si, dans l'état initial du mélange, les quantités d'eau contenues dans les deux vases sont respectivement proportionnelles aux capacités de ces vases, on a $\alpha:\beta=a:b$; de là $\alpha b-\beta a=0$, et partant

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}=\alpha.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, quelque multipliées que soient les opérations, l'état des deux mélanges demeure invariable.