ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Statique appliquée. De l'équilibre dans l'échelle à incendie, et d'une nouvelle machine, propre à mouvoir les fardeaux

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 357-360
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__357_0>

STATIQUE APPLIQUÉE.

De l'équilibre dans l'échelle à incendie, et d'une nouvelle machine, propre à mouvoir les fardeaux;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

On a proposé, il y a quelques années, pour retirer dés maisons embrasées les personnes qui y sont enfermées, une échelle très-ingénieuse. Elle présente des cas d'équilibre assez remarquables que je me propose ici de discuter.

La figure 1.re représente l'assemblage de plusieurs rhombes contigus : il faut imaginer un second système, parallèle à celui-là et lié avec lui par des axes fixés d'une part aux points O, O', O'',..., et de l'autre à leurs correspondans dans le second système. Les côtés de tous les rhombes sont assemblés à charnières; et l'ensemble des deux systèmes forme une sorte d'échelle qui peut se plier ou s'allonger subitement, lorsqu'on fait varier l'angle des côtés du premier rhombe inférieur (*). La machine, placée verticalement, repose sur quatre roulettes A, A',...., destinées à faciliter son transport et le jeu des mouvemens angulaires des rhombes. Enfin, à la partie supé-

(*) Chaque système de rhombes ressemble exactement à ces pincettes en acier dont se servent quelques fumeurs, pour retirer des charbons du feu, sans se brûler les doigts; ou encore au système de traverses en bois sur lesquelles sont établis des petits soldats, dans certains joujoux d'enfans.

J. D. G.

rieure se trouve étendue une toile DMD′, destinée à recevoir la personne qu'on veut descendre.

Cela posé, concevons que la machine doive être mise en jeu par deux forces égales et opposées Q, appliquées en A et A′, destinées à faire varier l'angle AOA′. Soit P le poids de la machine, que je suppose agir au milieu de la hauteur HR (quoique, pour plus grande solidité, il soit convenable de faire décroître, de bas en haut, l'épaisseur des côtés des rhombes). Soit M le poids de la personne placée en M, sur la toile. Il s'agit de trouver l'équation d'équilibre, entre les forces M, P, Q.

Le principe de la décomposition des forces serait ici d'une application difficile, ou tout au moins fort longue : celui des vitesses virtuelles vaudrait mieux ; mais le plus simple est, dans le cas présent, celui en vertu duquel le centre commun de gravité de plusieurs poids en équilibre doit être tellement situé qu'il ne puisse plus descendre.

Pour employer ce dernier principe, il faut remplacer, par la pensée, les deux forces horizontales Q, qui agissent en A et A′, par un poids vertical $2Q$, suspendu à deux cordons AHQ, A′HQ, qui passeraient sur une poulie H.

Si l'on prend, à l'égard de l'axe fixe AA′, les momens des poids M, P, et qu'ayant retranché celui du poids $2Q$, on divise le reste par $M+P+2Q$, on aura la distance de cette ligne AA′ au centre commun de gravité des trois poids ; distance qui, dans le cas d'équilibre, devra être un *minimum*. Mais, comme la somme des poids est constante, il suffira d'écrire que la différence des momens ci-dessus est un *minimum*.

Soient $AH=x$; l'angle $HAO=z$, le côté AO de l'un des rhombes $=a$; le nombre des centres ou axes O, O′, O″, ... $=n$; la longueur DM de la demi-corde $=c$; enfin la longueur de la corde $AHQ=b$. Cette longueur est arbitraire, et doit disparaître du calcul.

On aura $AH=a\text{Cos.}z$; $HO=a\text{Sin.}z$; $HR=2na\text{Sin.}z$; $MR=\sqrt{c^2-a^2\text{Cos.}^2z}$; $HM=2na\text{Sin.}z-\sqrt{c^2-a^2\text{Cos.}^2z}$; et $HQ=b-a\text{Cos.}z$.

On aura donc, d'après cela, 1.° pour le moment du poids M,

$$2nMa\text{Sin}.z - M\sqrt{c^2 - a^2\text{Cos}.^2 z}\ ;$$

2.° pour le moment du poids P,

$$nPa\text{Sin}.z\ ;$$

3.° enfin, pour le moment du poids $2Q$,

$$2Q(b - a\text{Cos}.z).$$

Égalant donc à zéro la différentielle de la différence entre la somme des deux premiers momens et le troisième, on obtiendra, pour l'équation d'équilibre cherchée,

$$\{n(2M+P)\text{Cos}.z - 2Q\text{Sin}.z\}\sqrt{c^2 - a^2\text{Cos}.^2 z} - Ma\text{Sin}.z\text{Cos}.z = 0. \quad (1)$$

Cette équation fera connaître facilement la valeur de la force Q, pour une valeur déterminée de l'angle z. Il ne sera pas aussi aisé d'avoir z en fonction de Q.

Comme M est ordinairement très-petit à l'égard de P, si l'on fait $M=0$, on aura

$$nP = 2Q\text{Tang}.z. \qquad (2)$$

Cette équation sera rigoureuse, pour un moment quelconque de l'ascension, parce qu'alors le poids M ne chargera pas encore la machine.

Cette machine peut rester en équilibre, indépendamment de la force Q. On a l'équation qui convient à ce cas, en faisant $Q=0$ dans l'équation (1); il vient alors

$$a\text{Cos}.z = x = \sqrt{\frac{n^2(2M+P)^2c^2 - M^2a^2}{n^2(2M+P)^2 - M^2}}. \qquad (3)$$

Le dénominateur de la fraction sous le radical étant essentiellement positif, on voit que ce cas ne pourra avoir lieu qu'autant qu'on aura

$$c > \frac{Ma}{n(2M+P)}\ ;$$

et comme, d'un autre côté, on doit toujours avoir $x<a$, d'où $c<a$; on voit que l'équilibre ne pourra avoir lieu qu'autant que c se trouvera compris entre certaines limites. Si, par exemple, on fait $P=0$ et $n=1$, la formule (3) donnera

$$x=\sqrt{\frac{4c^2-a^2}{3}};$$

d'où l'on voit qu'on doit avoir alors $2c>a$ et $2c<2a$.

Il résulte encore de ce qui précède que le poids M ne pourra parvenir à l'horizontale AA′, ni même s'en approcher à un certain point, à moins que la force $2Q$ n'agisse dans un sens contraire à celui que nous lui avons supposé, et alors il faudra la faire négative dans (1); ainsi, elle devra être employée alternativement, tantôt de A vers H, et tantôt de H vers A.

Enfin, si l'on voulait avoir égard au frottement, on pourrait consulter ma *Statique des voûtes*, où j'ai donné le premier des formules rigoureuses et générales (Voyez aussi mes *Opuscules mathématiques*, problème 17).

On peut déduire de ce qui précède l'idée d'une machine propre à mouvoir les fardeaux. CQ, C′Q′, C″Q″, ... (fig. 4) représentent plusieurs groupes, composés chacun de trois rhombes. Les extrémités C, C′, C″ sont fixées et liées au sol. Le fardeau P qu'il s'agit de mouvoir est lié par un cordon au premier centre I du premier groupe; l'autre extrémité Q du premier groupe est liée au premier centre I′ du second groupe, par un nouveau cordon; l'extrémité Q′ du second groupe, est liée, de la même manière au premier centre I″ du troisième groupe; et ainsi de suite. Enfin la puissance est appliquée à l'extrémité Q″ du dernier groupe.

Il est aisé de voir que, la vitesse du poids P étant 1, celles des points Q, Q′, Q″, ... seront respectivement 3, 9, 27, ...; ainsi, s'il y a seulement 4 groupes, de 3 rhombes chacun, la puissance sera à la résistance :: 1:81.

On pourrait former les groupes de plus ou de moins de 3 rhombes; mais je crois le système de 3 rhombes par groupe le plus avantageux.

Il laisse aux artistes à juger des circonstances où la machine que je viens de décrire, peut être utile.

GÉOMÉTRIE