ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie transcendante. Recherche des lignes et surfaces qui en touchent une infinité d'autres, se succédant suivant une loi uniforme

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 361-368

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__361_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherche des lignes et surfaces qui en touchent une infinité d'autres, se succédant suivant une loi uniforme;

Par M. GERGONNE.

LA recherche des lignes et surfaces limites d'une infinité d'autres lignes et surfaces liées entre elles par une loi commune, soit par son étroite liaison avec la théorie des *solutions particulières*, soit par la multitude des applications dont elle est susceptible, peut être regardée comme un des objets les plus intéressans de la haute géométrie.

Cette recherche n'a été déduite jusqu'ici que de la considération des infiniment petits ou des limites, ou enfin de la théorie même des solutions particulières. Je vais faire voir comment, la *série de Taylor* une fois admise, on peut la ramener, sans la compliquer davantage, aux notions les plus simples et les plus lumineuses.

§. I.

Recherche de la ligne qui en touche une infinité d'autres, dont les équations ne diffèrent que par une constante.

Soit

$$\varphi(x, y, A)=V=0\ ;$$

l'équation commune à une infinité de courbes planes, rapportées aux mêmes axes, et ne différant entre elles que par la constante A ; et proposons-nous de déterminer l'équation de la courbe à laquelle toutes celles-là sont tangentes.

Soit MM cette courbe cherchée (fig. 5), c'est-à-dire, la courbe enveloppante ; soit GG celle des courbes enveloppées qui répond à la valeur A, et soit T le point où elle touche MM ; soient, de plus, G'G' celle des courbes enveloppées qui répond à la valeur $A'=A+\alpha$, T' le point où elle touche MM, et P celui où elle coupe GG. On conçoit clairement que, plus α diminuera, et plus aussi le point P se rapprochera du point T, en suivant l'arc de courbe PT ; en sorte que ces deux points se réuniront en un seul, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul ; mais alors les deux courbes GG et G'G' se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

Équation de GG, $\quad V=0$, (I)

Équation de G'G', $\quad V+\dfrac{dV}{dA}\dfrac{\alpha}{1}+\dfrac{d^2V}{dA^2}\dfrac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0$; (II)

équations qui rentrent, en effet, l'une dans l'autre, lorsqu'on suppose $\alpha=0$, et dont la combinaison, dans le cas contraire, fera connaître le point P.

Or, on sait que, lorsque deux courbes passent par un même point, toute courbe qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de ces deux courbes, passe aussi par ce point ; donc, en particulier, la différence entre les équations (I) et (II) est l'équation d'une courbe H'H' qui, comme G'G', coupe aussi GG au point P. Cette équation est

$$\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots.=0\,,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{dV}{dA}+\alpha\left\{\frac{d^2V}{dA^2}\frac{1}{1.2}+\ldots.\right\}=0\,, \qquad \text{(III)}$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi, on pourra, pour la détermination du point P, substituer la combinaison des équations (I) et (III) à celle des équations (I) et (II).

Mais, à mesure que α décroîtra, le point P se rapprochant du point T, la courbe H′H′, exprimée par l'équation (III), tendra continuellement à devenir une courbe HH coupant MM ou GG en T; on aura donc l'équation de HH, en faisant $\alpha=0$, dans l'équation (III), ce qui la réduit simplement à $\frac{dV}{dA}=0$. Ainsi le point T de MM, qui répond à la valeur A de la constante, sera donné par le système des deux équations

$$V=0\ ,\quad \frac{dV}{dA}=0\ ;$$

si donc on élimine A entre elles, l'équation résultante, en x et y, devant être satisfaite par les coordonnées des points T, T′, T″,.., qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'',.... de la constante, sera l'équation de la courbe MM qui les contient tous, c'est-à-dire, de la courbe cherchée.

Si l'équation proposée était

$$\varphi(x\ ,y\ ,A_1\ ,A_2\ ,\ldots A_n)=V=0\ ;$$

les constantes A_1, A_2,.... A_n étant liées par les équations suivantes

$$\begin{array}{l} f_1\ (A_1\ ,A_2\ ,\ldots A_n)=F_1\ =0\ ,\\ f_2\ (A_1\ ,A_2\ ,\ldots A_n)=F_2\ =0\ ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\\ f_{n-1}(A_1\ ,A_2\ ,\ldots A_n)=F_{n-1}=0\ ; \end{array}$$

on pourrait, à l'aide de ces équations, éliminer de V toutes les constantes, excepté une seule, ce qui ramènerait la question au cas précédent.

On pourrait aussi considérer toutes les constantes comme des fonctions de l'une d'elles, A_1 par exemple; alors en différentiant sous ce point de vue, et éliminant

$$A_1\ ,A_2\ ,\ldots.A_n\ ,\quad \frac{dA_2}{dA_1}\ ,\quad \frac{dA_3}{dA_1}\ ,\ldots\frac{dA_n}{dA_1}\ ,$$

entre les équations

$$V=0\,,\ F_1=0\,,\ F_2=0\,,\ldots F_{n-1}=0\,,\ \frac{d(V)}{dA_1}=0\,,\ \frac{d(F_1)}{dA_1}=0\,,\ \frac{d(F_2)}{dA_1}=0\,,\ldots\ \frac{d(F_{n-1})}{dA_1}=0\,;$$

l'équation résultante en x et y serait l'équation cherchée.

Mais il sera peut-être plus élégant encore d'opérer comme il suit. On formera l'équation

$$\delta V+\lambda_1.\delta F_1+\lambda_2.\delta F_2+\ldots\ldots+\lambda_{n-1}.\delta F_{n-1}=0\ ;$$

en y égalant à zéro les coefficiens des variations

$$\delta A_1\ ,\quad \delta A_2\ ,\ldots\ldots\delta A_n\ ,$$

on obtiendra n équations entre lesquelles on éliminera les $n-1$ multiplicateurs arbitraires $\lambda_1\ ,\ \lambda_2\ ,\ldots\ldots\lambda_{n-1}$; en supposant que $F_n=0$ soit l'équation résultante de l'élimination, il ne s'agira plus que d'éliminer

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ldots\ldots A_n\ ,$$

entre les équations

$$V=0\ ,\quad F_1=0\ ,\quad F_2=0\ ,\quad F_3=0\ ,\ldots\ldots F_n=0.$$

De ce qui précède se déduisent en particulier, d'une manière très-simple, la théorie des *développées* et celle des *caustiques*.

La théorie que je viens d'exposer m'a été présentée, il y a plus de six ans, à peu près telle que je la donne ici, par M. F. Journet, alors élève du lycée de Nismes (*), et actuellement ingénieur des ponts et chaussées. Je vais indiquer brièvement de quelle manière elle peut être étendue aux surfaces courbes.

§. II.

Recherche de la surface qui en touche une infinité d'autres, dont les équations ne diffèrent que par une constante.

Soit

$$\varphi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,A)=V=0\ ,$$

(*) C'était, comme l'on voit, dans un temps, déjà bien loin de nous, où il y avait des cours publics de calcul différentiel, même dans les lycées de provinces ; et où l'on pensait que l'étude de la haute géométrie et de la mécanique, seule véritable introduction à celle des sciences physiques, devait, tout aussi bien que tant d'autres études, entrer dans le plan d'une éducation vraiment libérale.

l'équation commune à une infinité de surfaces courbes, rapportées aux mêmes axes, et ne différant entre elles que par la constante A ; et proposons-nous de déterminer l'équation de la surface à laquelle toutes celles-là sont tangentes.

Soit MMM la surface cherchée (*), c'est-à-dire, la surface enveloppe; soit GGG celle des surfaces enveloppées qui répond à la valeur A, et soit TT la courbe suivant laquelle elle touche MMM; soient, de plus, G′G′G′ celle des surfaces enveloppées qui répond à la valeur $A'=A+\alpha$, T′T′ la courbe suivant laquelle elle touche MMM, et PP celle suivant laquelle elle coupe GGG. On conçoit clairement que plus α diminuera, et plus aussi la courbe PP se rapprochera de TT, en suivant la surface GGG; en sorte que ces deux courbes se réuniront en une seule, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul; mais alors les deux surfaces GGG et G′G′G′ se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

Équation de GGG, $$V=0\,, \qquad \text{(I)}$$

Équation de G′G′G′, $$V+\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,; \qquad \text{(II)}$$

équations qui rentrent, en effet, l'une dans l'autre, lorsqu'on suppose $\alpha=0$, et dont la combinaison, dans le cas contraire, fera connaître la courbe PP.

Or, on sait que, lorsque deux surfaces se coupent suivant une certaine courbe, toute surface qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de ces deux surfaces, passe aussi par cette courbe; donc, en particulier, la différence entre les équations (I) et (II) est l'équation d'une surface H′H′H′ qui, comme G′G′G′, coupe GGG suivant la courbe PP. Cette équation est

---

(*) Je sous-entends la figure, qu'il est plus aisé de concevoir que de représenter, sans confusion.

$$\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{dV}{dA}+\alpha\left\{\frac{d^2V}{dA^2}\frac{1}{1.2}+\ldots\right\}=0\,,\qquad \text{(III)}$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi, on pourra, pour la détermination de la courbe PP, substituer la combinaison des équations (I) et (III) à celle des équations (I) et (II).

Mais, à mesure que α décroîtra, la courbe PP se rapprochant de la courbe TT, la surface H'H'H', exprimée par l'équation (III), tendra continuellement à devenir une surface HHH, coupant MMM ou GGG suivant TT; on aura donc l'équation de HHH, en faisant $\alpha=0$, dans l'équation (III), ce qui la réduit simplement à $\frac{dV}{dA}=0$. Ainsi, la courbe TT, tracée sur MMM, qui répond à la valeur A de la constante, sera donnée par le système des deux équations

$$V=0\,,\quad \frac{dV}{dA}=0\,;$$

si donc on élimine A entre elles, l'équation résultante, en x,y,z, devant être satisfaite par les coordonnées des courbes TT, T'T', T''T'',.... qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'',.... de la constante, sera l'équation de la surface MMM qui les contient toutes, c'est-à-dire, de la surface cherchée.

Ces lignes TT, T'T', T''T'',...., qui répondent aux diverses valeurs de la constante, sont ce qu'on appelle les *Caractéristiques de la surface limite*. Comme elles se succèdent suivant une loi uniforme, on peut demander de déterminer la courbe à laquelle elles sont toutes tangentes, et qui est dite l'*arête de rebroussement de la surface limite*. Voici par quelles considérations on obtiendra cette courbe.

Soit mm la courbe cherchée; soit gg celle des caractéristiques qui répond à la valeur A de la constante, cette caractéristique touchant mm au point t. Soit de plus $g'g'$ celle des caractéristiques qui répond à la valeur $A'=A+\alpha$; soient t' le point où elle touche mm, et p celui où elle coupe gg. Plus α diminuera, et plus aussi le point p se rapprochera du point t, en suivant l'arc de courbe pt; en sorte que ces deux points se réuniront en un seul, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul, mais alors les deux courbes gg et $g'g'$ se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

$$\text{Équations de } gg \left\{ \begin{array}{ll} V=0\,, & (1) \\ \dfrac{dV}{dA}=0\,; & (2) \end{array} \right.$$

$$\text{Équations de } g'g' \left\{ \begin{array}{ll} V+\dfrac{dV}{dA}\dfrac{\alpha}{1}+\dfrac{d^2V}{dA^2}\dfrac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,, & (3) \\ \dfrac{dV}{dA}+\dfrac{d^2V}{dA^2}\dfrac{\alpha}{1}+\dfrac{d^3V}{dA^3}\dfrac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,; & (4) \end{array} \right.$$

équations dont les dernières rentrent, en effet, dans les premières, lorsqu'on suppose $\alpha=0$; et dont la combinaison, dans le cas contraire, fera connaître le point p. Elles sont au nombre de quatre, parce que, généralement parlant, deux courbes ne se coupent pas dans l'espace, mais, comme gg et $g'g'$ sont ici situées toutes deux sur la surface MMM, elles doivent se rencontrer et ces quatre équations doivent équivaloir à trois seulement.

En rejetant donc la troisième, le point p sera donné par le système des équations (1), (2), (4). Mais, lorsque trois surfaces passent par un même point, toute surface qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de celle-là, passe aussi par ce point; donc, en particulier, la différence entre les équations (2) et (4) est l'équation d'une surface qui, combinée avec celle qu'exprime l'équation (1), exprimera une courbe $h'h'$ qui, comme $g'g'$, coupera gg au point p. Cette équation est

$$\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^3V}{dA^3}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{d^2V}{dA^2}+\alpha\left\{\frac{d^3V}{dA^3}+\ldots\right\}=0\,, \qquad (5)$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi on pourra, pour la détermination du point p, substituer le système des équations (1), (2), (5) au système des équations (1), (2), (4).

Mais, à mesure que α décroîtra, la courbe $h'h'$ exprimée par le système des équations (1) et (5), tendra continuellement à devenir une courbe hh, coupant mm ou gg en t; on aura donc les équations de hh, en faisant $\alpha=0$, dans l'équation (5), et combinant l'équation résultante avec l'équation (1); ainsi le point t de mm, qui répond à la valeur A de la constante, sera donné par le système des trois équations

$$V=0\,, \quad \frac{dV}{dA}=0\,, \quad \frac{d^2V}{dA^2}=0\,,$$

si donc on élimine A entre elles, les deux équations résultantes, en x, y, z, devant être satisfaites à la fois par les coordonnées des points t, t', t'', ... qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'', ... de la constante, seront les équations de la courbe mm qui les contient tous, c'est-à-dire, de l'arête de rebroussement.

Si l'équation $V=0$ renfermait n constantes A_1, A_2, A_3, ... A_n, liées entre elles par $n-1$ équations; on se conduirait absolument comme il a été expliqué dans le § précédent. (*)

(*) Ce qui précède me paraît établir, d'une manière nette, un point assez délicat de la géométrie transcendante, et pourrait, à la rigueur, être ramené aux simples élémens. Je n'ignore pas, au surplus, que l'opinion, toujours vacillante, semble maintenant repousser ces doctrines lumineuses, appelées vainement, pendant plus d'un siècle, par les vœux des géomètres, et dont la découverte fait tant d'honneur à l'époque où nous vivons. Mais, je n'en demeure pas moins fermement persuadé que, s'il peut être utile de se familiariser avec la considération des infiniment petits, il est beaucoup plus important encore, sur-tout dans l'enseignement élémentaire, de n'appuyer les théories fondamentales que sur les notions les plus rigoureuses, du moins, lorsqu'on aspire à quelque chose de plus qu'à enseigner ou à apprendre un métier.