
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

**Analyse. Détermination du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque, entre un nombre quelconque d'inconnues.
Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés.
Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode publiée par M. Budan, pour la résolution des équations numériques**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 115-122

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__115_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE.

Détermination du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque , entre un nombre quelconque d'inconnues.

Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés.

Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode publiée par M. BUDAN , pour la résolution des équations numériques ;

Par M. GERGONNE.



JE réunis ici , dans un même article , diverses théories qui , à raison de la liaison étroite qui existe entre elles , ne peuvent que se simplifier beaucoup par leur rapprochement.

§. I.

Détermination du nombre des termes d'une équation complète d'un degré quelconque , entre un nombre quelconque d'inconnues.

Soit m le degré d'une équation complète entre n inconnues ; le nombre des termes de cette équation sera une fonction de m et de n qu'il s'agit de déterminer , et que nous représenterons par $A_{m,n}$.

Pour plus de simplicité , concevons que les coefficients de tous les termes de cette équation soient positifs et égaux à l'unité : ce

qui ne changera rien à la nature du problème. L'équation proposée devant renfermer tous les termes de l'équation complète du $(m-1)^{\text{m}^{\text{e}}}$ degré, entre n inconnues, plus la totalité des termes du $m^{\text{m}^{\text{e}}}$ ordre, entre les mêmes inconnues; en désignant par ν le nombre de ces derniers, on devra avoir l'équation

$$A_{m,n} = A_{m-1,n} + \nu. \quad (1)$$

Il s'agit présentement de déterminer ν .

Pour cela, concevons que l'on multiplie chacun des termes d'ordres inférieurs à m par une somme de puissances semblables des n inconnues, dont les exposans soient tels que ces multiplications donnent toutes des produits de l'ordre m : ce qui exigera que l'on multiplie le terme tout connu 1 par $x^m + y^m + z^m + \dots$, l'ensemble des termes du premier ordre par $x^{m-1} + y^{m-1} + z^{m-1} + \dots$, et ainsi de suite; il est clair que le nombre total des termes de ces produits, abstraction faite de toute réduction, sera $nA_{m-1,n}$.

Or, je dis que ces mêmes termes ne seront autre chose que les termes du $m^{\text{m}^{\text{e}}}$ ordre de la proposée, écrits chacun m fois. En effet, en représentant généralement l'un de ces derniers par $x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$, avec la condition $\alpha + \beta + \gamma + \dots = m$, on voit qu'il aura été formé autant de fois qu'il y a de manières de diminuer successivement chacun de ses exposans de toutes les unités qu'il renferme; c'est-à-dire, de m manières différentes.

On a donc, d'après cela

$$nA_{m-1,n} = m\nu, \quad \text{d'où} \quad \nu = \frac{n}{m} A_{m-1,n}; \quad (2)$$

et par conséquent (1)

$$A_{m,n} = A_{m-1,n} + \frac{n}{m} A_{m-1,n} = \frac{m+n}{m} A_{m-1,n};$$

ou enfin

$$mA_{m,n} = (m+n)A_{m-1,n}. \quad (3)$$

En changeant successivement, dans cette équation, m en $m-1$,
 $m-2$,

FIGURES.

$m-2, m-3, \dots, 2, 1$, et remarquant que $A_{1,n} = n+1$, il viendra

$$\begin{aligned} mA_{m,n} &= (m+n)A_{m-1,n}, \\ (m-1)A_{m-1,n} &= (m+n-2)A_{m-2,n}, \\ (m-2)A_{m-2,n} &= (m+n-1)A_{m-3,n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ 2A_{2,n} &= (n+2)A_{1,n}, \\ A_{1,n} &= (n+1); \end{aligned}$$

ce qui donnera, en multipliant, supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation produit, et tirant la valeur de $A_{m,n}$ (*),

$$A_{m,n} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m}{m}; \tag{4}$$

formule qui résout le problème.

Cette solution, la plus simple que je connaisse, m'a été communiquée par M. G. Fournier, élève très-distingué du lycée de Nismes.

Si l'on multiplie, haut et bas, la valeur de $A_{m,n}$ par $1.2.3\dots n$, elle devient

$$A_{m,n} = \frac{1.2.3\dots(m+n)}{1.2.3\dots m \times 1.2.3\dots n};$$

ou, en adoptant les notations de M. Kramp (**),

$$A_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

On voit alors que $A_{m,n}$ est une fonction symétrique de m et n , et qu'ainsi on doit avoir

$$A_{m,n} = A_{n,m}; \tag{5}$$

ce qui revient à dire qu'il y a autant de termes dans une équation complète du n^{me} degré entre m inconnues qu'il y en a dans une équation complète du m^{me} degré entre n inconnues.

(*) Voyez la note de la page 200 du second volume de ce recueil.

(**) Voyez la note de la page 116 du 3.e volume de ce recueil.

§. II.

Recherche des principales formules de la théorie des nombres figurés.

Parce que $A_{m,n}$ est une fonction symétrique des nombres m et n , nous emploierons, à l'avenir, pour représenter cette fonction, la notation plus simple

$$A_{m,n} = (m, n).$$

En conséquence, nous aurons

$$(m, n) = (n, m), \quad (6)$$

et, quels que soient p et q

$$(0, p) = (0, q) = (p, 0) = (q, 0) = 1. \quad (7)$$

Cette notation admise, l'équation (3), dans laquelle on peut permuter entre eux les nombres m et n , donnera

$$\begin{aligned} m(m, n) &= (m+n)(m-1, n), \\ n(m, n) &= (m+n)(m, n-1); \end{aligned}$$

la somme de ces deux équations, divisée par $m+n$, sera

$$(m, n) = (m-1, n) + (m, n-1); \quad (8)$$

or, en se rappelant les équations (7), on voit que cette dernière exprime la construction du *triangle arithmétique*; et qu'ainsi (m, n) est la formule générale des *nombres figurés*.

L'équation (6) exprime donc que *le $(n+1)^{m^e}$ nombre figuré du m^{me} ordre est égal au $(m+1)^{n^e}$ nombre figuré du n^{me} ordre*; et l'équation (8) exprime que *le $(m+1)^{n^e}$ nombre figuré du n^{me} ordre, ou le $(n+1)^{m^e}$ nombre figuré du m^{me} ordre, est la somme du m^{me} nombre figuré du n^{me} ordre et du n^{me} nombre figuré du m^{me} ordre.*

De cette dernière on tire

$$(m, n) - (m-1, n) = (m, n-1);$$

substituant successivement pour m , dans celle-ci, les nombres 1, 2, 3, ..., m , il viendra

$$\begin{aligned} (1, n) - 1 &= (1, n-1) ; \\ (2, n) - (1, n) &= (2, n-1) , \\ (3, n) - (2, n) &= (3, n-1) , \\ &\dots\dots\dots , \\ (m, n) - (m-1, n) &= (m, n-1) \end{aligned}$$

ajoutant ces dernières et réduisant, on aura

$$(m, n) = (n, m) = (0, n-1) + (1, n-1) + (2, n-1) + \dots + (m, n-1) ; \quad (9)$$

et l'on aurait pareillement

$$(m, n) = (n, m) = (0, m-1) + (1, m-1) + (2, m-1) + \dots + (n, m-1) ;$$

c'est-à-dire, que le $(n+1)^{\text{me}}$ nombre figuré du m^{me} ordre, ou le $(m+1)^{\text{me}}$ nombre figuré du n^{me} ordre, est égal à la somme des n^{me} nombres figurés de tous les ordres jusqu'au m^{me} ordre inclusivement; ou encore à la somme des $m+1$ premiers nombres figurés du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Je terminerai par donner, d'après M. Lhuilier (*), la sommation des *inverses des nombres figurés*. Il est aisé de se convaincre, par le développement et les réductions, que l'équation suivante est identique

$$\frac{1}{(m, n-1)} = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{m!}{(m+n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\}. \quad (10)$$

Si l'on y substitue successivement pour m les nombres 0, 1, 2, ..., m , il viendra

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1!}{(n-1)!} \right\}, \\ \frac{1}{(1, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1!}{(n-1)!} - \frac{2!}{n!} \right\}, \\ \frac{1}{(2, n-1)} &= \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{2!}{n!} - \frac{3!}{(n+1)!} \right\}, \\ &\dots\dots\dots , \end{aligned}$$

(*) Voyez ses *Éléments raisonnés d'algèbre*.

$$\frac{1}{(m, n-1)} = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{m!}{(m+n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\};$$

d'où, en ajoutant et réduisant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{1}{(2, n-1)} + \dots + \frac{1}{(m, n-1)} \\ = \frac{(n-1)!}{n-2} \left\{ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{(m+1)!}{(m+n-1)!} \right\}; \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{2}{(2, n-1)} + \dots + \frac{1}{(m, n-1)} \\ = \frac{n-1}{n-2} \left\{ 1 - \frac{1}{(m+1, n-2)} \right\}; \quad (11) \end{aligned}$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose $m = \infty$, elle deviendra simplement,

$$\frac{1}{(0, n-1)} + \frac{1}{(1, n-1)} + \frac{1}{(2, n-1)} + \frac{1}{(3, n-1)} + \dots = \frac{n-1}{n-2}; \quad (12)$$

c'est-à-dire,

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{3}{n+2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{4}{n+3} + \dots = \frac{n-1}{n-2}.$$

§. III.

Démonstration du principe qui sert de fondement à la méthode donnée par M. BUDAN, pour la résolution des équations numériques.

Soient $P_{0,0}$, $P_{0,1}$, $P_{0,2}$, $P_{0,3}$, ..., $P_{0,n-1}$, $P_{0,n}$, ... les termes de la première ligne horizontale d'une table à double entrée, dont la loi soit telle qu'un terme quelconque de cette table soit égal à celui qui le précède immédiatement à gauche, augmenté de celui qui est immédiatement au-dessus de lui. En désignant par $P_{k,n}$ ce terme quelconque, on aura

$$P_{k,n} = P_{k,n-1} + P_{k-1,n}. \quad (13)$$

Pour connaître ce terme $P_{k,n}$, il est clair qu'il sera nécessaire et suffisant de connaître les termes de la première ligne horizontale, jusqu'au terme $P_{0,n}$ inclusivement; d'où on peut conclure que si

l'on trouve une expression de $P_{k,n}$ qui, renfermant la totalité de ces termes, satisfasse à l'équation (13), elle en sera la valeur complète.

Or, l'expression

$$P_{k,n} = (k-1,n)P_{0,0} + (k-1,n-1)P_{0,1} + \dots + (k-1,1)P_{0,n-1} + (k-1,0)P_{0,n}, \quad (14)$$

satisfait d'abord à la première de ces deux conditions; elle satisfait en outre à la seconde. On en tire en effet

$$P_{k-1,n} = (k-2,n)P_{0,0} + (k-2,n-1)P_{0,1} + \dots + (k-2,1)P_{0,n-1} + (k-2,0)P_{0,n},$$

$$P_{k,n-1} = (k-1,n-1)P_{0,0} + (k-1,n-2)P_{0,1} + \dots + (k-1,0)P_{0,n-1};$$

d'où on conclut, en ajoutant, et ayant égard à l'équation (8),

$$P_{k-1,n} + P_{k,n-1} = (k-1,n)P_{0,0} + (k-1,n-1)P_{0,1} + \dots + (k-1,1)P_{0,n-1} + (k-1,0)P_{0,n} = P_{k,n};$$

ce qui est précisément l'équation (13).

Si, dans l'équation (14), on change k en $m-n+1$, elle deviendra

$$P_{m-n+1,n} = (m-n,n)P_{0,0} + (m-n,n-1)P_{0,1} + \dots + (m-n,0)P_{0,n}; \quad (15)$$

équation qui va nous servir tout à l'heure.

Dans la table à double entrée dont il s'agit ici, les termes de la seconde ligne sont dits les *sommes premières* de ceux de la première; ceux de la troisième en sont dits les *sommes secondes*, et ainsi de suite.

Soit présentement l'équation quelconque

$$P_{0,0}x^m + P_{0,1}x^{m-1} + P_{0,2}x^{m-2} + \dots + P_{0,n}x^{m-n} + \dots + P_{0,m-1}x + P_{0,m} = 0. \quad (16)$$

Soit posé $x-1=y$, d'où $x=y+1$. En substituant, et conservant toujours les mêmes notations, il viendra

$$P_{0,0}y^m + (m-1,1)P_{0,0} \left[\begin{array}{l} y^{m-1} + \dots + (m-n, n)P_{0,0} \\ + \dots + (m-n, n-1)P_{0,1} \\ + \dots + (m-n, n-2)P_{0,2} \\ + \dots + (m-n, n-3)P_{0,3} \\ + \dots + (m-n, n-4)P_{0,4} \\ + \dots + (m-n, n-5)P_{0,5} \\ + \dots + (m-n, n-6)P_{0,6} \\ + \dots + (m-n, n-7)P_{0,7} \\ + \dots + (m-n, n-8)P_{0,8} \\ + \dots + (m-n, n-9)P_{0,9} \\ + \dots + (m-n, n-10)P_{0,10} \\ + \dots + (m-n, n-11)P_{0,11} \\ + \dots + (m-n, n-12)P_{0,12} \\ + \dots + (m-n, n-13)P_{0,13} \\ + \dots + (m-n, n-14)P_{0,14} \\ + \dots + (m-n, n-15)P_{0,15} \\ + \dots + (m-n, n-16)P_{0,16} \\ + \dots + (m-n, n-17)P_{0,17} \\ + \dots + (m-n, n-18)P_{0,18} \\ + \dots + (m-n, n-19)P_{0,19} \\ + \dots + (m-n, n-20)P_{0,20} \\ + \dots + (m-n, n-21)P_{0,21} \\ + \dots + (m-n, n-22)P_{0,22} \\ + \dots + (m-n, n-23)P_{0,23} \\ + \dots + (m-n, n-24)P_{0,24} \\ + \dots + (m-n, n-25)P_{0,25} \\ + \dots + (m-n, n-26)P_{0,26} \\ + \dots + (m-n, n-27)P_{0,27} \\ + \dots + (m-n, n-28)P_{0,28} \\ + \dots + (m-n, n-29)P_{0,29} \\ + \dots + (m-n, n-30)P_{0,30} \\ + \dots + (m-n, n-31)P_{0,31} \\ + \dots + (m-n, n-32)P_{0,32} \\ + \dots + (m-n, n-33)P_{0,33} \\ + \dots + (m-n, n-34)P_{0,34} \\ + \dots + (m-n, n-35)P_{0,35} \\ + \dots + (m-n, n-36)P_{0,36} \\ + \dots + (m-n, n-37)P_{0,37} \\ + \dots + (m-n, n-38)P_{0,38} \\ + \dots + (m-n, n-39)P_{0,39} \\ + \dots + (m-n, n-40)P_{0,40} \\ + \dots + (m-n, n-41)P_{0,41} \\ + \dots + (m-n, n-42)P_{0,42} \\ + \dots + (m-n, n-43)P_{0,43} \\ + \dots + (m-n, n-44)P_{0,44} \\ + \dots + (m-n, n-45)P_{0,45} \\ + \dots + (m-n, n-46)P_{0,46} \\ + \dots + (m-n, n-47)P_{0,47} \\ + \dots + (m-n, n-48)P_{0,48} \\ + \dots + (m-n, n-49)P_{0,49} \\ + \dots + (m-n, n-50)P_{0,50} \\ + \dots + (m-n, n-51)P_{0,51} \\ + \dots + (m-n, n-52)P_{0,52} \\ + \dots + (m-n, n-53)P_{0,53} \\ + \dots + (m-n, n-54)P_{0,54} \\ + \dots + (m-n, n-55)P_{0,55} \\ + \dots + (m-n, n-56)P_{0,56} \\ + \dots + (m-n, n-57)P_{0,57} \\ + \dots + (m-n, n-58)P_{0,58} \\ + \dots + (m-n, n-59)P_{0,59} \\ + \dots + (m-n, n-60)P_{0,60} \\ + \dots + (m-n, n-61)P_{0,61} \\ + \dots + (m-n, n-62)P_{0,62} \\ + \dots + (m-n, n-63)P_{0,63} \\ + \dots + (m-n, n-64)P_{0,64} \\ + \dots + (m-n, n-65)P_{0,65} \\ + \dots + (m-n, n-66)P_{0,66} \\ + \dots + (m-n, n-67)P_{0,67} \\ + \dots + (m-n, n-68)P_{0,68} \\ + \dots + (m-n, n-69)P_{0,69} \\ + \dots + (m-n, n-70)P_{0,70} \\ + \dots + (m-n, n-71)P_{0,71} \\ + \dots + (m-n, n-72)P_{0,72} \\ + \dots + (m-n, n-73)P_{0,73} \\ + \dots + (m-n, n-74)P_{0,74} \\ + \dots + (m-n, n-75)P_{0,75} \\ + \dots + (m-n, n-76)P_{0,76} \\ + \dots + (m-n, n-77)P_{0,77} \\ + \dots + (m-n, n-78)P_{0,78} \\ + \dots + (m-n, n-79)P_{0,79} \\ + \dots + (m-n, n-80)P_{0,80} \\ + \dots + (m-n, n-81)P_{0,81} \\ + \dots + (m-n, n-82)P_{0,82} \\ + \dots + (m-n, n-83)P_{0,83} \\ + \dots + (m-n, n-84)P_{0,84} \\ + \dots + (m-n, n-85)P_{0,85} \\ + \dots + (m-n, n-86)P_{0,86} \\ + \dots + (m-n, n-87)P_{0,87} \\ + \dots + (m-n, n-88)P_{0,88} \\ + \dots + (m-n, n-89)P_{0,89} \\ + \dots + (m-n, n-90)P_{0,90} \\ + \dots + (m-n, n-91)P_{0,91} \\ + \dots + (m-n, n-92)P_{0,92} \\ + \dots + (m-n, n-93)P_{0,93} \\ + \dots + (m-n, n-94)P_{0,94} \\ + \dots + (m-n, n-95)P_{0,95} \\ + \dots + (m-n, n-96)P_{0,96} \\ + \dots + (m-n, n-97)P_{0,97} \\ + \dots + (m-n, n-98)P_{0,98} \\ + \dots + (m-n, n-99)P_{0,99} \\ + \dots + (m-n, n-100)P_{0,100} \end{array} \right] y^{m-n} + \dots + P_{0,0} = 0; \quad (17)$$

équation qui, en vertu des formules (7, 14 et 15), devient simplement

$$P_{m+1,0} \cdot y^m + P_{m,1} \cdot y^{m-1} + P_{m-1,2} \cdot y^{m-2} + \dots + P_{m-n+1,n} \cdot y^{m-n} + \dots + P_{1,m} = 0. \quad (18)$$

Ainsi, les coefficients successifs, de gauche à droite, des termes de l'équation dont les racines sont celles d'une équation proposée diminuée d'une unité, sont, à partir du premier terme, la première somme $(m+1)^{m^e}$, la seconde somme m^{m^e} , la troisième somme $(m-1)^{m^e}$, et ainsi de suite, des coefficients de la proposée.

C'est sur ce principe que repose la méthode publiée par M. Budan, pour la résolution des équations numériques; méthode qui n'exige uniquement que l'usage de l'addition et de la soustraction.

Rien n'est plus facile, d'après cela, que de diminuer les racines d'une équation d'une unité. Que l'équation proposée soit

$$5x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 15x + 24 = 0,$$

par le procédé indiqué ci-dessus, on formera la table suivante :

$$5 - 8 - 11 + 15 + 24,$$

$$5 - 3 - 14 + 29 + 53;$$

$$5 + 2 - 12 + 17,$$

$$5 + 7 - 5,$$

$$5 + 12,$$

$$5,$$

et l'équation transformée sera

$$5(x-1)^4 + 12(x-1)^3 - 5(x-1)^2 + 17(x-1) + 53 = 0;$$

identique avec la proposée. Nous renvoyons, pour les applications, à l'ouvrage de M. Budan.