
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

MASSABIEAU

GUILLAUME

**Questions résolues. Démonstrations du théorème de géométrie
énoncé à la page 60 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 183-195

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__183_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à la page 60 de ce volume ;

Par MM. MASSABIEAU et GUILLAUME , professeurs de mathématiques au lycée de Rodez , GOBERT , élève du lycée d'Angers , et M. BÉRARD , principal et professeur de mathématiques au collège de Briançon. (*)



ENONCÉ. M' , M'' étant deux points quelconques d'une parabole , O le point de concours des tangentes en ces points , et F le foyer ; on propose de démontrer que

$$\frac{\overline{M'O}^2}{\overline{M'F}} = \frac{\overline{M''O}^2}{\overline{M''F}} ;$$

d'où il suit que , si F tombe sur $M'M''$, le sommet de l'angle O , qui devient droit , est placé sur la directrice , et la ligne OF est perpendiculaire sur la corde $M'M''$.

Les solutions fournies par MM. Massabieau , Guillaume et Gobert sont purement analitiques , et reviennent à peu près à ce qui suit.

(*) Le théorème a été proposé par M. Bérard.

Soit

$$y^2 = 4cx, \quad (1)$$

l'équation de la parabole, et soient les coordonnées des points M' , M'' , O et F ainsi qu'il suit

$$\text{pour } M' \begin{cases} x' \\ y' \end{cases}, \quad \text{pour } M'' \begin{cases} x'' \\ y'' \end{cases}; \quad \text{pour } O \begin{cases} a \\ b \end{cases}, \quad \text{pour } F \begin{cases} c \\ 0 \end{cases},$$

on aura conséquemment

$$y'^2 = 4cx', \quad y''^2 = 4cx''. \quad (2)$$

Les équations des tangentes, par les points M' , M'' seront

$$yy' = 2c(x+x'), \quad yy'' = 2c(x+x''); \quad (3)$$

et, comme le point O appartient à la fois à ces deux tangentes; on aura

$$by' = 2c(a+x'), \quad by'' = 2c(a+x''); \quad (4)$$

d'où on tire, en ayant égard aux équations (2)

$$a = \frac{y'y''}{4c}, \quad b = \frac{1}{2}(y'+y''). \quad (5)$$

Cela posé on a

$$\begin{aligned} \overline{M'O}^2 &= (x'-a)^2 + (y'-b)^2 = \left\{ \frac{y'^2}{4c} - \frac{y'y''}{4c} \right\}^2 \\ &+ \left\{ y' - \frac{1}{2}(y'+y'') \right\}^2 = \frac{y'^2 + 4c^2}{16c^2} (y'-y'')^2, \end{aligned}$$

ou

$$\overline{M'O}^2 = \frac{x'+c}{4c} (y'-y'')^2,$$

et on a pareillement

$$\overline{M''O}^2 = \frac{x''+c}{4c} (y'-y'')^2;$$

mais, d'un autre côté, on a aussi

$$\overline{M'F}^2$$

$$\overline{M'F}^2 = (x' - c)^2 + y'^2 = (x' - c)^2 + 4cx' = (x' + c)^2 ;$$

d'où $M'F = x' + c ;$

et l'on a pareillement

$$M''F = x'' + c ;$$

donc

$$\frac{\overline{M'O}^2}{M'F} = \frac{\overline{M''O}^2}{M''F} = \frac{(y' - y'')^2}{4c} ; \quad (6)$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

On a de plus

$$M'F \times M''F = (x' + c)(x'' + c) = \left\{ \frac{y'^2}{4c} + c \right\} \left\{ \frac{y''^2}{4c} + c \right\} = \left\{ \frac{y'y''}{4c} - c \right\}^2 + \frac{1}{4} \{y' + y''\}^2 ;$$

ou

$$M'F \times M''F = (a - c)^2 + b^2 = \overline{OF}^2 .$$

Éliminant successivement $M'F$ et $M''F$ entre cette dernière équation et l'équation (6), et extrayant chaque fois la racine quarrée, il viendra

$$\frac{M'O}{M''O} = \frac{M'F}{OF} = \frac{OF}{M''F} ;$$

d'où il résulte que les deux triangles $FM'O$ et FOM'' sont semblables. (*)

Cela posé, si la somme des angles égaux OFM' , OFM'' vaut

(*) C'est le théorème de Robert Simson, rappelé par M. Servois, à la page 156 de ce volume.

deux angles droits ; c'est-à-dire , si le point F est sur la corde M/M'', chacun de ces deux angles sera droit ou , en d'autres termes, OF sera perpendiculaire sur M/M'' ; la somme des deux angles FOM' et FM'O vaudra donc deux angles droits ; et , puisque le dernier est égal à FOM'' , il en résulte que l'angle M'OM'' est alors droit.

Lorsque les trois points M' , F , M'' sont en ligne droite , on a

$$\frac{y'}{x'-c} = \frac{y''}{x''-c} ,$$

où

$$y' \left\{ \frac{y''}{4c} - c \right\} = y'' \left\{ \frac{y'}{4c} - c \right\} ;$$

ou

$$(y'y'' + 4c^2)(y' - y'') = 0 ,$$

ou simplement

$$y'y'' + 4c^2 = 0 ;$$

ce qui donne

$$a = \frac{y'y''}{4c} = -c ;$$

ainsi alors le point O est perpétuellement sur la directrice.

Voici présentement la démonstration de M. Bérard , qui est purement géométrique.

Par les trois points M' , M'' , O (fig. 2) soient menées des parallèles à l'axe ; et soit H le point où la dernière rencontre la courbe. Par ce point H soient menées des parallèles à OM' et à OM'' , rencontrant respectivement en P' , P'' les diamètres menés par M' , M'' . Le carré d'une ordonnée au diamètre étant le produit de l'abscisse par le quadruple de la distance du sommet de ce diamètre au foyer ; on a

$$\overline{HP'}^2 = 4M'F \times M'P' , \quad \overline{HP''}^2 = 4M''F \times M''P'' ;$$

mais , à cause des parallélogrammes OP' , OP'' , on a

$$M'P' = M''P'' = OH , \quad HP' = OM' , \quad HP'' = OM'' ;$$

donc

$$\overline{OM'}^2 = 4FM' \times OH , \quad \overline{OM''}^2 = 4FM'' \times OH ;$$

ce qui donne , par l'élimination de OH ,

$$\frac{\overline{OM'}^2}{FM'} = \frac{\overline{OM''}^2}{FM''} .$$

Si le point F est en ligne droite avec les points M' , M'' (fig. 3) ; cette équation n'exprimera autre chose que la proportionnalité des carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle avec leurs projections sur l'hypothénuse ; le triangle $M'OM''$ sera donc rectangle en O , et OF sera perpendiculaire sur $M'M''$.

Soit , dans ce cas , prolongée OH jusqu'à la rencontre de $M'M''$ en I , et soit menée HF . On sait que , par la propriété de la parabole le point H est le milieu de OI ; puis donc que l'angle OFI est droit , ce point H est le centre du cercle circonscrit au triangle OFI , et par conséquent $HO = HF$; et puisque OH est parallèle à l'axe , le point O est un point de la directrice.

*Tentatives et réflexions relatives au problème proposé
à la page 352 du troisième volume de ce recueil ;*

Par M. KRAMP , professeur , doyen de la faculté des
sciences de l'académie de Strasbourg.



L E problème proposé à la page 352 du troisième volume des
Annales revient évidemment à celui où il s'agirait de déterminer

l'angle au sommet d'une pyramide ou d'un cône donné, à base quelconque. C'est aussi sous ce point de vue que je me propose de l'envisager, dans ce qui va suivre.

1. L'angle au sommet de tout corps pyramidal a pour mesure naturelle de sa capacité le polygone sphérique décrit de son sommet comme centre, avec un rayon arbitraire, dans toutes les faces qui le comprennent; et le rapport de la surface de ce polygone à celle de la sphère entière, ou bien à la huitième partie de cette sphère, connue sous le nom de *triangle sphérique tri-rectangle*, et que, dans mes *Éléments de géométrie*, j'ai désigné par le nom d'*orthoèdre*.

2. Désignant par s la somme des angles externes d'un polygone sphérique quelconque, la surface de ce polygone sera égale à $360^\circ - s$; l'angle droit étant l'unité des angles linéaires, de même que l'orthoèdre est celui des angles solides. Ainsi l'angle droit sera à $360^\circ - s$, comme l'orthoèdre est à la surface du polygone sphérique.

3. La figure 4 désigne la surface antérieure d'une pyramide, ayant pour base le polygone rectiligne ABCD..... Si du point S comme centre, et avec un rayon arbitraire, on décrit, dans les faces de cette pyramide, le polygone sphérique $abcd$; la surface de ce dernier polygone exprimera la capacité de l'angle solide pyramidal dont le sommet est S, tandis que ses angles exprimeront les inclinaisons mutuelles de ses faces entre elles; c'est ainsi que, par exemple, l'angle sphérique b exprime l'angle plan (*) compris entre les deux faces triangulaires ABS, CBS. On le trouvera, lorsque l'on connaîtra tous les angles linéaires aux sommets de la base; c'est ainsi qu'en désignant par B l'angle ABC, par m l'angle ABS, et par n l'angle CBS, on aura le cosinus de l'angle plan ABSC, ou

(*) Il est presque superflu d'observer que l'auteur emploie ici les anciennes démonstrations d'*angles linéaires*, *plans* et *solides*, correspondant aux dénominations nouvelles d'*angles plans*, *dièdres* et *polyèdres*.

$$\text{Cos.}b = \frac{\text{Cos.}B - \text{Cos.}m \text{Cos.}n}{\text{Sin.}m \text{Sin.}n} ;$$

4. Mais, pour appliquer ces principes généraux aux conoïdes ; ayant pour base une courbe quelconque, rentrant en elle-même, il faut nécessairement réduire à des coordonnées rectangulaires la position des sommets de cette base, considérée comme polygone rectiligne d'un nombre de côtés fini. Soient donc (fig. 5) L, M, N, trois sommets consécutifs de cette base, que nous rapporterons à l'axe indéfini AZ, mené dans le plan de cette même base, par le pied A de la perpendiculaire SA. Nous désignerons par h cette même hauteur SA ; et, prenant le point A pour origine des coordonnées, nous exprimerons par x, y les coordonnées du premier sommet L ; par t, u , celles du second sommet M ; et par p, q , celles du troisième sommet N ; de manière que

$$\text{AO} = x, \quad \text{AP} = t, \quad \text{AQ} = p,$$

$$\text{OL} = y, \quad \text{PM} = u, \quad \text{QN} = q ;$$

Il en résultera

$$\overline{\text{SL}}^2 = h^2 + x^2 + y^2, \quad \overline{\text{LM}}^2 = (t-x)^2 + (u-y)^2,$$

$$\overline{\text{SM}}^2 = h^2 + t^2 + u^2, \quad \overline{\text{MN}}^2 = (p-t)^2 + (q-u)^2 ;$$

$$\overline{\text{SN}}^2 = h^2 + p^2 + q^2 ; \quad \overline{\text{LN}}^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2 ;$$

d'où l'on tire

$$\text{Cos.} \text{SML} = \frac{t^2 + u^2 - tx - uy}{\text{SM} \times \text{LN}},$$

$$\text{Cos.SMN} = \frac{t^2 + u^2 - pt - qu}{\text{SM} \times \text{MN}},$$

$$\text{Cos.LMN} = \frac{t^2 + u^2 - tx - uy - pt - qu + px + qy}{\text{LM} \times \text{MN}}.$$

Il faudra aussi se procurer les expressions des sinus des deux premiers SML et SMN de ces angles. On aura, après les réductions nécessaires,

$$\text{Sin.}^2\text{SML} = \frac{h^2 \cdot \overline{\text{LM}}^2 + (ty - ux)^2}{\overline{\text{SM}}^2 \times \overline{\text{LM}}^2};$$

$$\text{Sin.}^2\text{SMN} = \frac{h^2 \cdot \overline{\text{MN}}^2 + (qt - pu)^2}{\overline{\text{SM}}^2 \times \overline{\text{MN}}^2}.$$

Le produit $\text{SM} \times \text{LM} \cdot \text{Sin.SML}$ exprime le double de la surface du triangle LSM; d'où il suit que cette surface aura pour expression

$$\frac{1}{2} \sqrt{h^2 \cdot \overline{\text{LM}}^2 + (ty - ux)^2}.$$

5. Le cosinus de l'angle plan LSMN, qui exprime l'inclinaison mutuelle des deux faces triangulaires LSM et MSN, ayant pour son sommet linéaire l'arête pyramidal SM, est exprimé comme il suit :

$$\text{Cos.LSMN} = \frac{\text{Cos.LMN} - \text{Cos.LMSCos.NMS}}{\text{Sin.LMS} \cdot \text{Sin.NMS}}.$$

Après les substitutions, et les réductions, en assez grand nombre; qui se présentent, cette expression devient

$$\text{Cos.LSMN} = \frac{h^2(t^2+u^2-tx-uy-pt-qu+px+qy)-(ty-ux)(qt-pu)}{\sqrt{\{h^2.LM^2+(ty-ux)^2\}\{h^2.MN^2+(qt-pu)^2\}}}$$

On trouve ensuite, pour le sinus du même angle,

$$\text{Sin.LSMN} = \frac{h.SM(pu-qt+ty-ux-py+qx)}{\sqrt{\{h^2.LM^2+(ty-ux)^2\}\{h^2.MN^2+(qt-pu)^2\}}}$$

d'où il résulte enfin

$$\text{Tang.LSMN} = \frac{h.SM(pu-qt+ty-ux-py+qx)}{h^2(t^2+u^2-tx-uy-pt-qu+px+qy)-(ty-ux)(pu-qt)};$$

et telle est la tangente de l'angle plan, compris entre les deux faces triangulaires contiguës LSM, NSM.

6. Pour passer du polygone rectiligne au cas d'une courbe continue, prenons sur son périmètre les trois points L, M, N, à des distances infiniment petites l'une de l'autre; et, en continuant de désigner par les lettres t , u , les deux coordonnées AP, PM, du point intermédiaire M, nous aurons $t+dt$, $u+du$, respectivement, pour les coordonnées AQ, QN, du point suivant N; tandis que $t-dt+d^2t-d^3t+\dots$, $u-du+d^2u-d^3u+\dots$ seront, respectivement, les expressions complètes des coordonnées AO, OL, du point précédent L. Comme, dans le problème que nous nous proposons, il suffira de nous arrêter aux secondes différentielles; nous aurons

$$AO=x=t-dt+d^2t; \quad AP=t, \quad AQ=p=t+dt,$$

$$OL=y=u-du+d^2u; \quad PM=u; \quad QN=q=u+du.$$

En faisant ces substitutions, dans l'expression ci-dessus, nous aurons

pour la différentielle de la somme des angles extérieurs, différentielle que nous représenterons conséquemment par ds , et de laquelle dépend la solution de notre problème, l'expression suivante

$$ds = \frac{h \cdot SM(dt^2 u - du^2 t)}{h^2(dt^2 + du^2) + (t du - u dt)^2}.$$

7. Si nous désignons, en outre, par A la portion de la surface convexe de ce corps conique, comprise entre les deux arêtes AL , AN , nous aurons

$$dA = \sqrt{h^2(dt^2 + du^2) + (t du - u dt)^2},$$

d'où

$$ds = \frac{h dt du \sqrt{h^2 + t^2 + u^2}}{4 dA^2}.$$

L'expression de ds est donc beaucoup plus compliquée que celle de dA ; et, comme cette dernière n'est intégrable que dans un nombre de cas très-borné, desquels celui du cône oblique, à base circulaire, est formellement exclu; on voit que l'on doit encore moins se flatter d'une solution complète du problème qui concerne la capacité des angles au sommet.

8. A la place des coordonnées rectangulaires t et u , essayons de substituer le rayon vecteur $AM = r$ et l'angle $MAZ = \phi$ qu'il fait avec l'axe des t , ce qui donne $t = r \cos. \phi$, $u = r \sin. \phi$. On trouvera ainsi

$$dA = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 dr^2 + (h^2 + r^2) r^2 d\phi^2};$$

et si l'on fait $d\phi$ constant, d'où $d^2\phi = 0$, on aura

$$ds = \frac{2 dr^2 d\phi + r^2 d\phi^3 - r d^2 r d\phi}{h^2 dr^2 + (h^2 + r^2) r^2 d\phi^2} \cdot h \sqrt{h^2 + r^2}.$$

9. Prenons pour premier exemple le cône droit ayant A pour centre de sa base, et r pour rayon de cette base. Ici on aura $dr=0$; la différentielle de la surface conoïdique deviendra donc

$$dA = \frac{1}{2} r d\phi \sqrt{h^2 + r^2},$$

ayant pour intégrale

$$A = \frac{1}{2} r \phi \sqrt{h^2 + r^2} + C ;$$

ce qui donne, pour la surface entière du cône $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$. Faisant, pour abrégér, le côté du cône ou $\sqrt{h^2 + r^2} = f$, on aura $ds = \frac{hd\phi}{f}$, et $s = \frac{h\phi}{f}$. Ainsi, la somme des angles extérieurs, pour le cône entier, étant d'après cela $\frac{2\pi h}{f}$, la capacité de l'angle au sommet deviendra $\frac{2\pi(f-h)}{f}$. On aura donc la proportion: l'angle droit, ou $\frac{\pi}{2}$, est à $\frac{2\pi(f-h)}{f}$, comme l'orthoèdre est à la capacité de l'angle qu'on cherche, lequel, par conséquent, sera égal à l'orthoèdre multiplié par $\frac{4(f-h)}{f}$. Effectivement, l'angle en question occupe, sur la surface d'une sphère du rayon f , une calotte sphérique de la hauteur $f-h$, dont la surface sera, par conséquent, $2\pi f(f-h)$; d'un autre côté, l'orthoèdre, égal au huitième de cette sphère, sera $\frac{\pi f^2}{2}$; divisant donc la première expression par la seconde, on aura la fraction $\frac{4(f-h)}{f}$, que le précédent calcul nous a fait obtenir.

10. On sait que la surface du cône oblique se refuse à tous les moyens connus d'intégration. On peut en conclure, à plus forte raison, que la capacité de son angle au sommet se trouvera hors du domaine de l'analyse actuelle. Soit SA (fig. 6) la hauteur d'un

tel cône, ayant pour base le cercle décrit du centre C, avec le rayon $CB=CD=r$; soient, de plus, $AS=h$, $AC=a$, $AP=t$, $PM=u$, ce qui nous fournit l'équation $(a-t)^2+u^2=r^2$. On aura, d'après cela

$$dA = \frac{1}{2} dt \sqrt{\frac{h^2 r^2 + (a^2 - r^2 - at)^2}{r^2 - (a-t)^2}};$$

différentielle qui n'est intégrable dans aucun cas. On trouvera ensuite

$$ds = \frac{hr^2 dt}{h^2 r^2 + (a^2 - r^2 - at)^2} \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2 - a^2 + 2at}{r^2 - (a-t)^2}}.$$

D'après l'essai que j'en ai fait, cette différentielle m'a paru aussi peu intégrable que la précédente.

En faisant

$$y = \sqrt{h^2 + r^2 - a^2 + 2at},$$

et posant de plus, pour abrégier,

$$a^2 + r^2 + h^2 = m^2, \quad a^2 - r^2 + h^2 = n^2,$$

cette différentielle deviendra

$$ds = \frac{8hr^2 y^2 dy}{(4h^2 r^2 + n^4 - 2n^2 y^2 + y^4) \sqrt{4a^2 r^2 - m^4 + 2m^2 y^2 - y^4}};$$

formule qui n'est pas susceptible d'être intégrée.

II. L'une des courbes qui semblerait promettre des résultats plus favorables, c'est la développée de l'ellipse, comprise sous l'équation

$$\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{u}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 ; \quad (*)$$

il en résulte, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$dt^2 + du^2 = \frac{b^2 a^{\frac{2}{3}} + c^2 t^{\frac{2}{3}}}{a^2 t^{\frac{2}{3}}} dt^2 .$$

La racine quarrée de cette formule est entièrement intégrable ; il en résulte que l'arc de la développée elliptique, pris depuis $t = a$ est

$$\frac{a^4 - \{b^2 a^{\frac{2}{3}} + c^2 t^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}}{ac^2} ;$$

ce qui donne, pour la longueur du quart de cette développée ;

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} ;$$

cette courbe est donc rectifiable ; comme le sont les développées de toutes les courbes algébriques. Mais cet avantage est perdu, tant pour la surface que pour la capacité angulaire du cône dont elle est la base. Les différentielles dont dépendent ces deux problèmes sont aussi peu intégrables que dans le cas du cône oblique à base circulaire.

(*) Dans cette équation a et b ne sont point les demi-axes, mais des troisièmes proportionnelles à ces demi-axes et à l'excentricité.