ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CACH

Philosophie mathématique. Essai sur la théorie des quantités négatives

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__1_0>

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Essai sur la théorie des quantités négatives ;

Par M. Cach, licencié ès sciences, professeur de mathématiques au collége de Tours.

Soit l'équation

$$x+a-b=c\ ;$$

on en déduit

$$x=c-a+b. \qquad (1)$$

Si, au lieu d'opérer de cette manière, on retranche de chaque membre le binôme $(a-b)$, on aura

$$x=c-(a-b). \qquad (2)$$

La quantité c restant quelconque, je vais faire successivement, sur a et b, les deux hypothèses suivantes, $a>b$ et $b>a$. Soit d'abord $a>b$ ou $a=b+\delta$; on aura, après la substitution dans les équations (1) et (2),

$$x=c-\delta\ ;\quad x=c-\delta\ ;$$

résultats parfaitement identiques.

Soit, en second lieu, $b>a$ ou $b=a+\delta$; les mêmes substitutions donneront

$$x=c+\delta\ ,\quad x=c-[a-(a+\delta)]=c-(-\delta).$$

La dernière expression se présente sous une forme inintelligible, puisqu'elle exige qu'on exécute une soustraction impossible, et que l'on retranche de c le résultat de cette soustraction. La valeur $c+\delta$ peut servir à l'interpréter ; car on l'a obtenue en faisant passer les quantités a et b du premier membre dans le second ; ce que l'on est toujours libre de faire, quelles que soient les valeurs de ces quantités ; de sorte que l'on pourrait en conclure que

$$c-(-\delta)=c+\delta.$$

Quoiqu'il ne manque rien à cette conclusion, du côté de la rigueur, la marche que l'on a suivie n'éclaire pas assez sur la difficulté en question, et ne fait point assez bien voir comment on passe de l'expression $c-(-\delta)$ à l'expression $c+\delta$. Afin de le mieux apercevoir, il faut remonter à l'équation primitive, et y substituer à la place de b sa valeur $a+\delta$. On trouve alors

$$x-\delta=c.$$

Ainsi, c'est à tort que l'on avait considéré la suppression du binôme $(a-b)$ comme une soustraction, puisqu'il est évident qu'il fallait, au contraire, ajouter à chaque membre la quantité δ pour avoir x. Lorsqu'on opère sur des quantités numériques, il est clair qu'on ne peut jamais éprouver le moindre embarras ; mais, en opérant sur l'équation littérale

$$x+a-b=c\ ,$$

où a et b peuvent avoir telles valeurs que l'on veut, rien n'indique si, pour dégager l'inconnue x, on a réellement une addition ou une soustraction à effectuer. Si l'on suppose donc qu'on en ait tiré

$$x=c-(a-b)\ ,$$

c'est qu'on a tacitement regardé a comme étant plus grand que b, et par conséquent cette expression sera en défaut, lorsqu'on aura $a<b$; mais alors il est évident que la proposée aurait pu être mise sous la forme

$$x-(b-a)=c\ ;$$

d'où l'on aurait tiré

$$x=c+(b-a).$$

Réciproquement, cette dernière expression sera en défaut, lorsqu'on aura $b<a$; et alors la première sera la véritable. On voit donc que, si l'une des valeurs se présente sous une forme inintelligible par elle-même, on est en droit d'en conclure qu'on a opéré dans un sens inverse de celui suivant lequel on aurait dû opérer, et que l'on doit modifier le résultat, en prenant la différence dans le sens où elle peut être naturellement prise, et l'affectant d'un signe contraire à celui que le calcul a donné. D'après cela, on aura évidemment

$$c-(a-b)=c-(-\delta)=c+(b-a)=c+\delta\ ;$$

$$c+(a-b)=c+(-\delta)=c-(b-a)=c-\delta\ .$$

Telle est la manière dont doivent être envisagées l'addition et la soustraction des quantités négatives isolées.

De l'équation

$$x-A=ac-bc-ad+bd\ , \qquad (3)$$

on tire

$$x=A+ac-bc-ad+bd\ ,$$

valeur qui peut, en général, se mettre sous cette forme

$$x=A+(a-b)(c-d). \qquad (4)$$

1.° Je suppose $a<b$ et $c>d$ ou $b=a+\delta$ et $c=d+\omega$. Il vient, après la substitution dans l'équation (4),

$$x=A+(-\delta)(\omega).$$

C'est-à-dire, qu'on aurait à ajouter à A le produit d'une quantité négative isolée par une quantité positive. Or, on peut remarquer que, dans ce cas, on n'était point autorisé à mettre la valeur de x sous la forme (4), puisque l'identité de cette forme avec la forme (3) n'a été démontrée (*Alg. Mul.*) que pour le cas où $a-b$ et $c-d$ étaient des différences naturelles; mais alors la valeur (3), ou $a<b$, et par conséquent $ac<bc$ et $ad<bd$, pouvait s'écrire de la manière qui suit :

$$x=A-(bc-ac)+(bd-ad)=A-(bc-ac-bd+ad)$$
$$=A-[(b-a)c-(b-a)d]=A-(b-a)(c-d)=A-\delta\omega\ ;$$

d'où l'on voit qu'on a été conduit à multiplier une quantité négative isolée par une quantité positive, parce qu'on a regardé comme possible la soustraction $(a-b)$ qui, dans l'hypothèse actuelle est impossible; et, dans ce cas, on compense l'erreur qui a été commise, en formant le produit, comme si la quantité $(-\delta)$ était positive, et en affectant ensuite le produit du signe $(-)$.

2.° Si l'on avait $a>b$ et $d>c$ ou $a=b+\delta$ et $d=c+\omega$; on trouverait, en substituant dans (4)

$$x=A+(\delta)(-\omega).$$

Mais, par la même raison que précédemment, on n'est pas alors en droit de mettre la valeur (3) sous la forme (4); et puisque, dans le cas présent, on a $a>b$, d'où $ac>bc$ et $ad>bd$, on peut écrire

$$x=A-(ad-bd)+(ac-bc)=A-(ad-bd-ac+bc)$$

$$=A-(a-b)(d-c)=A-\delta\omega.$$

On voit ici, comme dans la précédente hypothèse, comment on a été conduit à multiplier une quantité positive par une quantité négative isolée, et comment on doit effectuer l'opération.

3.° Enfin, en supposant, en même temps, $b>a$ et $d>c$, c'est-à-dire, $b=a+\delta$ et $d=c+\omega$, on obtient

$$x=A+(-\delta)(-\omega)\;;$$

mais alors, ayant $bd>ad$ et $bc>ac$, on devait donner à la valeur (3), au lieu de la forme (4), la forme suivante

$$x=A+(bd-ad)-(bc-ac)=A+(bd-ad-bc+ac)$$

$$=A+(b-a)(d-c)=A+\delta\omega.$$

D'où l'on conclut que le produit de deux quantités négatives isolées est le même que celui de ces deux quantités prises positivement.

Quant à la division, je considère l'expression

$$x = A + \frac{a-b}{c-d}, \qquad (5)$$

qui résulte, ou qui, du moins, peut être censée résulter de l'équation

$$(x-A)(c-d) = a-b. \qquad (6)$$

Or, si $(a-b)$ est négatif et $(c-d)$ positif, il faudra que $(x-A)$, ou son égal $\frac{a-b}{c-d}$, soit négatif; il en sera absolument de même, si $(a-b)$ est positif et $(c-d)$ négatif; enfin, s'ils sont tous deux négatifs, $(x-A)$ ou son égal $\frac{a-b}{c-d}$ devra être positif.