Lettre de M. Servois

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 228-235

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__228_0>

Lettre de M. Servois.

J'accueille ordinairement avec faveur, mon vieux camarade, les idées nouvelles en fait de doctrine, sur-tout lorsqu'elles se présentent sous la garantie de noms connus honorablement, par d'autres travaux scientifiques. Loin donc que je songe à donner aux idées de MM. Argand et Français sur les imaginaires les qualifications odieuses d'*inutiles*, d'*erronées*, etc., qui ne prouveraient autre chose que peu de courtoisie et beaucoup de prévention de ma part ; je désire vivement, au contraire, qu'elles puissent acquérir, avec le temps, ce qui leur manque encore, sous le rapport de l'évidence et de la fecondité. C'est donc dans cet esprit ; c'est autant dans l'intérêt de la science que pour satisfaire au vœu que vous manifestez de connaître mon opinion personnelle sur ce sujet, que je hasarde ici les réflexions suivantes.

1.° La démonstration du 1.er théorème de M. Français (pag. 65) est, à mon avis, tout à fait insuffisante et incomplète. En effet, cette proposition, qui en fait la base : « la quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est » une moyenne proportionnelle *de grandeur* et *de position* entre » $+a$ et $-a$ », équivaut à ces deux-ci, dont une ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne *de grandeur* entre $+a$ et $-q$) est évidente, et dont l'autre ($\pm a\sqrt{-1}$ moyenne *de position* entre $+a$ et $-a$) n'est pas prouvée, et renferme précisément le théorème dont il s'agit. (*)

(*) La moyenne proportionnelle *de grandeur* entre $+a$ et $-a$ n'est et ne saurait être que a ; car, lorsqu'on parle uniquement de grandeur, on doit faire abstraction des signes ; et $\sqrt{a.a}=a$. Mais lorsqu'on prend pour la moyenne $\pm a\sqrt{-1}$, on annonce par là même qu'on a eu égard aux positions inverses de $+a$ et $-a$; la moyenne doit donc alors conserver l'empreinte de cette considération ; elle est donc, par le fait même, une *moyenne de position* aussi bien que *de*

Cela

Cela est d'autant plus fâcheux que tout le reste du mémoire porte sur ce premier théorème. Quant à M. Argand, il s'est contenté d'appuyer cette proposition sur une sorte d'analogie et de convenance. Or, il me paraît que, lorsqu'il s'agit de fonder une doctrine extraordinaire, opposée en quelque sorte aux principes reçus, dans une science telle que l'analise mathématique, la simple analogie n'est point un moyen suffisant (*). Au surplus, on doit croire que M. Argand a porté de la démonstration de M. Français le même jugement que moi; car, dans le cas contraire, il n'aurait sans doute pas manqué d'en étayer son analogie, ne fût-ce que par une simple citation.

2.° Mais la nouvelle théorie est-elle au moins justifiée, *à posteriori*,

---

grandeur : l'interprétation du symbole $\pm a\sqrt{-1}$ est donc réduite à chercher une droite de laquelle on puisse dire qu'elle est posée par rapport à $+a$ comme $-a$ est posée par rapport à elle.

M. Servois trouve évident que, dans l'ancienne doctrine $\pm a\sqrt{-1}$ soit moyenne *de grandeur* entre $+a$ et $-a$. Il me paraît pourtant difficile de concevoir qu'une *négation de grandeur*, un *être de raison* puisse être dit *moyen* entre deux *grandeurs effectives*.

(*) Il serait sans doute fort à désirer que l'esprit humain procédât constamment comme on le fait dans les traités *ex professo* et sur les bancs des écoles; mais malheureusement cela n'arrive presque jamais. M. Servois, qui tient ici un langage à peu près pareil à celui de Viviani, dans des circonstances assez semblables à celles-ci, a-t-il donc oublié que ce n'est qu'après plus d'un siècle de méditations et d'essais infructueux qu'on est enfin parvenu à asseoir le calcul dit infinitésimal sur des bases solides? et encore trouve-t-on aujourd'hui des gens qui prétendent qu'on n'y a pas complètement réussi. Où en serions-nous pourtant si l'on avait exigé des premiers inventeurs de ce calcul, qu'ils démontrassent rigoureusement leurs méthodes avant d'en faire des applications? Il en a été exactement de même à l'égard des quantités négatives isolées; et il en sera toujours ainsi de toutes les théories; l'homme les aperçoit par une sorte d'instinct, bien longtemps avant d'être en état de les démontrer en rigueur.

J. D. G.

par de nombreuses applications ? C'est du moins de ce côté que M. Argand semble avoir voulu spécialement diriger ses moyens. Cependant, il convient lui-même, avec franchise, (page 143) qu'on pourrait ne voir là que *le simple emploi d'une notation particulière.* Pour moi, j'avoue que je ne vois encore, dans cette notation, qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analitiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif. (*) Je n'en donnerai qu'un exemple sur la première application de M. Argand, dans laquelle il se propose de trouver les développemens de $\text{Sin.}(a+b)$ et $\text{Cos.}(a+b)$. De la formule générale

$$e^{\alpha\sqrt{-1}}=\text{Cos.}\alpha+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\alpha\ ,$$

je tire

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}}=\text{Cos.}(a+b)+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}(a+b)\ ,$$

et ensuite

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}}=e^{a\sqrt{-1}}\,.\,e^{b\sqrt{-1}}=(\text{Cos.}a+\sqrt{-1}.\text{Sin.}a)(\text{Cos.}b+\sqrt{-1}\text{Sin.}b)\,,$$

ou

$$e^{(a+b)\sqrt{-1}}=(\text{Cos.}a\text{Cos.}b-\text{Sin.}a\text{Sin.}b)+\sqrt{-1}.(\text{Sin.}a\text{Cos.}b+\text{Cos.}a\text{Sin.}b)\ ;$$

(*) Voilà encore le langage de Viviani. M. Servois compterait-il donc pour peu de voir enfin l'analise algébrique débarrassée de ces formes inintelligibles et mystérieuses, de ces *non-sens* qui la déparent et en font, pour ainsi dire, une sorte de science cabalistique ? J'ai toutes sortes de raisons pour ne point lui prêter cette pensée. Or, c'est là principalement ce que M. Argand a eu en vue, comme il nous l'apprend lui-même, au commencement de son opuscule.

J. D. G.

égalant donc ces deux valeurs de $e^{(a+b)\sqrt{-1}}$, et séparant le réel de l'imaginaire, on aura

$$\mathrm{Cos.}(a+b)=\mathrm{Cos.}a\,\mathrm{Cos.}b-\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Sin}\,b\,,\quad \mathrm{Sin.}(a+b)=\mathrm{Sin.}a\,\mathrm{Cos.}b+\mathrm{Cos.}a\,\mathrm{Sin.}b.$$

Toutes les autres applications géométriques dérivent de la même source, avec la même facilité. On les trouve développées dans différens ouvrages, et notamment dans la *Théorie purement algébrique des quantités imaginaires*, par M. Suremain-de-Misséry (Paris 1801). L'application unique à l'algèbre (pag. 142), laisse, suivant moi, beaucoup à désirer. Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynôme des valeurs sans cesse décroissantes ; il faut de plus que la loi des décroissemens amène nécessairement le polynôme à *zéro*, ou qu'elle soit telle que *zéro* ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*asymptote* du polynôme. Je ne dirai rien de l'extension du principe dont s'occupe M. Argand à la fin de son mémoire : d'autant qu'elle est aussi uniquement fondée sur l'analogie ; mais je ne puis pourtant passer sous silence une assertion que je crois inexacte. Selon M. Argand (pag 146), la forme $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ *offre l'exemple le plus simple d'une quantité non réductible à la forme générale* $p+q\sqrt{-1}$. Ce géomètre aurait-il donc oublié qu'Euler a démontré que l'expression $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ n'est point imaginaire, mais égale à $e^{-\frac{1}{2}\varpi}$? (*)

(*) On a, en effet,

$$e^{x\sqrt{-1}}=\mathrm{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x \quad \text{d'où} \quad e^{-x}=(\mathrm{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x)^{\sqrt{-1}}$$

qui, en faisant $x=\frac{1}{2}\varpi$, devient

3.° Les géomètres ; exprimant assez souvent la position d'un point sur un plan, par un *rayon vecteur* et une *anomalie*, n'ont certainement point ignoré les conséquences que fournit la définition 4.e de M. Français, et sont conséquemment à l'abri du reproche que leur adresse ce géomètre (pag. 66). Mais, se contentant de considérer séparément la *grandeur* et la *position* d'une droite sur un plan, ils n'avaient point encore formé l'*idée composée* de ces deux *idées simples* ou, si l'on veut, ils n'avaient pas créé un nouvel *être géométrique*, réunissant, à la fois, la *grandeur* et la *position*.

$$e^{-\frac{1}{2}\varpi}=(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}.$$

Mais, sans rien préjuger sur le fond de l'assertion de M. Argand ; assertion qu'il n'énonce, au surplus, qu'avec le ton du *doute* ; j'observerai avec lui (pag. 147) que, tant qu'on n'aura pas une théorie bien claire des formes algébriques, non rigoureusement et immédiatement évaluable, il sera tout au moins permis de regarder comme précaires les démonstrations fondées sur l'usage de ces mêmes formes.

C'est probablement aussi l'opinion de M. Servois lui-même ; car, lui observant, il n'y a pas long-temps, que l'équation évidente

$$\sqrt[m]{1+m}=1+\frac{1}{1}+\frac{(1-m)}{1.2}+\frac{(1-m)(1-2m)}{1.2.3}+\ldots.$$

devenant, dans le cas où $m=0$,

$$\sqrt[0]{1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots;$$

il paraissait s'ensuivre que $\sqrt[0]{1}$ qui, en général, se présente sous la forme doublement indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)^{\frac{0}{0}}$, est cependant égal à e ; il parut ne pas goûter ce raisonnement, précisément pour les raisons que je viens d'expliquer.

J. D. G.

La grandeur d'une droite, et sa position, c'est-à-dire, l'angle qu'elle fait avec un axe fixe, sont deux quantités qu'on peut même regarder comme *homogènes*; or, comment les liera-t-on pour en faire le nouvel *être* appelé *ligne droite de grandeur et de position* ou, plus brièvement, *droite dirigée*? voilà une question qui ne me paraît pas encore assez approfondie. a étant la longeur d'une droite, α l'arc du rayon $=1$ compris dans l'angle qu'elle forme avec un axe fixe, on pourra, sans doute, représenter, en général, la *droite dirigée* par $\varphi(a, \alpha)$, et il faudra tâcher de déterminer la fonction φ d'après les conditions auxquelles elle doit essentiellement satisfaire. Ainsi, 1.° il faudra qu'à $\alpha=0$, $\alpha=2\varpi$, ... $\alpha=2n\varpi$ réponde $\varphi(a, \alpha)=+a$, et qu'à $\alpha=\varpi$, $\alpha=3\varpi$, ... $\alpha=(2n+1)\varpi$ réponde $\varphi(a, \alpha)=-a$: c'est évident; 2.° il faudra que, de $\varphi(a, \alpha)=\varphi(b, \beta)$, on puisse conclure $a=b$, $\alpha=\beta$: c'est encore évident. Mais faudra-t-il, 3.°, comme M. Français le demande (pag. 62), que de la proportion $\frac{\varphi(a, \alpha)}{\varphi(b, \beta)}=\frac{\varphi(c, \gamma)}{\varphi(d, \delta)}$ on puisse conclure $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et $\alpha-\beta=\gamma-\delta$? Je ne vois pas que cela découle nécessairement de l'idée de la fonction φ. La signification même du rapport $\frac{\varphi(a, \alpha)}{\varphi(b, \beta)}$ est fort obscure. Comment, en effet, peut-on dire d'une *droite dirigée* qu'elle est double, triple, ... d'une autre? C'est ce qu'on n'aperçoit point *à priori*. M. Français lui-même paraît l'avoir bien senti, puisqu'il ne parle de la *somme* des droites dirigées que comme conséquence de ses deux premiers théorèmes (pag. 67). Cependant, je ne m'oppose point à ce qu'on admette cette condition comme un des caractères essentiels de la fonction φ; mais alors la définition complète de la droite dirigée sera une définition *nominis*, *non rei*, ou, en d'autres termes, *droite dirigée* sera le nom d'une certaine fonction analitique de la grandeur et de la position d'une droite. Il suivra de là malheureusement qu'on ne construit plus les imaginaires, mais simplement qu'on les ramène à une même forme analitique. Quoi qu'il en soit, voyons quelle sera cette fonction. Il est d'abord clair que l'expression $\varphi(a\,,\,\alpha)=a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$ satisfait aux trois conditions annoncées. En effet, on a 1.° $\varphi(a\,,\,0)=a.e^{0\sqrt{-1}}=a$; $\varphi(a\,,\,\varpi)=a.e^{\varpi\sqrt{-1}}=a(\text{Cos.}\varpi+\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\varpi)=-a$; 2.° l'équation $\varphi(a\,,\,\alpha)=\varphi(b,\beta)$ devient $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}=b.e^{\beta\sqrt{-1}}$; ou bien, en prenant les logarithmes, séparant et repassant ensuite aux nombres, $a=b$, $\alpha=\beta$; 3.° enfin la proportion ci-dessus donne, par de semblables transformations, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et $\alpha-\beta=\gamma-\delta$. Mais la forme $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$ est elle la seule qui satisfasse à ces trois conditions ? Je ne le crois pas ; et il me paraît même évident qu'on y satisferait également en substituant un coefficient arbitraire à l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Ainsi la forme $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$ ne sera, à mon avis, qu'un cas particulier de celle que doit affecter l'expression analitique de la *droite dirigée*, dans sa *signification de convention*. Y a-t-il encore d'autres conditions qui dérivent de cette signification ? C'est ce qu'on ne dit pas ; et c'est ce que je ne vois pas non plus.

4.° La table à double argument que vous proposez dans votre note (pag. 71) étant appliquée sur un plan conçu divisé par points ou carreaux *infinitésimes*, de manière qu'à chaque carreau correspondît un nombre qui en serait l'*indice* ou la *cote*, serait très-propre à indiquer la grandeur et la position des rayons vecteurs qu'on ferait tourner autour du point ou carreau central portant ± 0 ; et il est bien remarquable qu'en désignant alors par a la longueur d'un rayon vecteur, par α l'angle qu'il ferait avec la ligne *réelle*.... -1 . ± 0, $+1$,...., par x, y les coordonnées rectangles du *point extrême opposé à l'origine*, rapporté à cette ligne réelle, comme axe des x, la cote de ce point serait exprimée par $x+y\sqrt{-1}$, et par conséquent, à cause de $x=a\text{Cos.}\alpha$, $y=a\text{Sin.}\alpha$, par $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$. Ainsi, voilà une nouvelle *interprétation géométrique* de la fonction $a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$ qui vaut bien, à mon avis, celle de MM. Argand et Français ;

mais certes, on n'en conclura pas que ce soit un nouveau moyen de construire *géométriquement* les quantités imaginaires, car les *cotes* ou *indices* dont il s'agit impliquent déjà l'imaginaire. Quoi qu'il en soit, il est clair que votre ingénieuse disposition tabulaire des grandeurs numériques peut être regardée comme une *tranche* centrale d'une table à triple argument qui remplirait l'espace suivant ses trois dimensions, et pourrait servir à fixer, de grandeur et de position, les droites dans l'espace. Vous donneriez sans doute à chaque terme la forme *trinomiale*; mais quel coefficient aurait le 3.^{e} terme ? Je ne le vois pas trop (*). L'analogie semblerait exiger que le trinôme fût de la forme $p\text{Cos.}\alpha+q\text{Cos.}\beta+r\text{Cos}\gamma$: α, β, γ étant les angles d'une droite avec trois axes rectangulaires ; et qu'on eût

$$(p\text{Cos.}\alpha+q\text{Cos.}\beta+r\text{Cos.}\alpha)(p'\text{Cos.}\alpha+q'\text{Cos.}\beta+r'\text{Cos.}\gamma)=\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1.$$

Les valeurs de p, q, r, p', q', r' qui satisferaient à cette condition seraient *absurdes*; mais seraient-elles imaginaires, réductibles à la forme générale $A+B\sqrt{-1}$? Voilà une question d'analise fort singulière que je soumets à vos lumières. La simple proposition que je vous en fais suffit pour vous faire voir que je ne crois point que toute fonction analitique *non réelle* soit vraiment réductible à la forme $A+B\sqrt{-1}$.

Lafère, le 23 novembre 1813.

(*) Mon estimable ami fait ici beaucoup trop d'honneur à ma pénétration. La vérité est que, lorsque j'imaginai cette petite table, je n'avais aucunement la pensée que l'on pût songer à l'étendre aux trois dimensions de l'espace, et que j'étais même fort disposé à croire que les grandeurs numériques ne s'étendaient que suivant deux de ces dimensions seulement. La lecture des mémoires de MM. Français et Argand m'a bien fait soupçonner qu'il n'en était pas ainsi ; mais sans m'apprendre encore de quelle manière je devais construire la table à triple argument.

J. D. G.