KRAMP

Astronomie. Essai d'une nouvelle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 237-250
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__237_0>

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Deuxième mémoire.*) (*)

38. LES élémens de l'orbite d'un corps céleste, assujetti aux lois de la gravitation, sont au nombre de *six ;* savoir : la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite, la position de la ligne des apsides, le grand axe, l'excentricité, et l'instant du passage par l'une des deux apsides. Trois observations complètes, en nous faisant connaître les longitudes et les latitudes géocentriques de ce corps dans trois instans donnés, nous fournissent six équations lesquelles suffisent pour déterminer un nombre pareil d'inconnues. En continuant de désigner par $\mathrm{Sin.}\lambda$ l'excentricité connue de l'orbe terrestre, nous tâcherons de représenter chacune de ces six inconnues par une série ordonnée selon les puissances ascendantes de λ, telle que

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\ldots\ldots$$

Le premier terme A est ce que devient cette série, dans le cas de $\lambda=0$, qui est celui d'un mouvement de la terre supposé uni-

(*) Voyez la pag. 161 de ce volume.

forme et circulaire ; et on voit que ce premier terme suffira, dans le cas où l'observateur se trouverait près de l'une des deux apsides de l'orbite terrestre. Comme cette excentricité est une fraction assez petite, égale à *un soixantième*, à peu près ; la série sera très-convergente, même dans les cas les moins favorables. En réservant, pour le mémoire qui suivra celui-ci, la recherche du second et du troisième termes de la série, nous nous bornerons, dans le mémoire actuel, à la recherche du seul premier terme que nous avons désigné par la lettre A.

39. *PROBLÈME V. Les élémens de l'orbite étant supposés connus, on demande, pour un instant quelconque, l'expression littérale de la longitude et de la latitude géocentrique de l'astre ?*

Solution. Soient (fig. 1)

S, le centre du soleil ;

EZAT, l'orbite de la terre ;

MBN′, l'orbite de l'astre ;

SN′, la ligne des nœuds ;

SE, la ligne des équinoxe ;

T, un lieu de la terre ;

M, le lieu correspondant de l'astre ;

MN une perpendiculaire sur la ligne des nœuds ;

ML, une perpendiculaire sur le plan de l'écliptique ; et soient menées ST, SL, SM, LN et TL prolongée jusqu'à la rencontre de SN′ en Q, et enfin SZ parallèle à TQ, projection sur l'écliptique du rayon visuel TM. Alors,

Les triangles MLT, MLS, MLN seront tous trois rectangles en L ;

ST et SM seront respectivement les rayons vecteurs de la terre et de l'astre ;

L'angle MNL mesurera l'inclinaison de l'orbite ;

Et les angles ESZ et MTL seront respectivement les longitude et latitude géocentriques de la planète ou de la comète.

40. Faisant $ST=a$, $SM=r$, le triangle MNS, rectangle en N, donnera

$$MN=r\,.\,Sin.MSN\ ,\ SN=r\,.\,Cos.MSN.$$

Le triangle MLN, rectangle en L, donnera ensuite

$$ML=MN\,.\,Sin.MNL=r\,.\,Sin.MSN\,.\,Sin.MNL\ ,$$

$$NL=MN\,.\,Cos.MNL=r\,.\,Sin.MSN\,.\,Cos.MNL\ ;$$

et si, du point T, on abaisse sur la ligne des nœuds SN la perpendiculaire TO, et qu'on mène la parallèle LP à cette même ligne SN, on aura

$$SO=a\,.\,Cos.NST\ ,\ TO=a\,.\,Sin.NST\ ;$$

d'où on conclura

$$NO=LP=SN-SO=r\,.\,Cos.MSN-a\,.\,Cos.NST\ ,$$

$$PT=TO-LN=a\,.\,Sin.NST-r\,.\,Sin.MSN\,.\,Cos.MNL\ ;$$

on aura donc

$$Tang.TLP=Tang.TQS=Tang.NSZ=\frac{a.Sin.NST-r.Sin.MSN\,.\,Cos.MNL}{r\,.\,Cos.MSN-a\,.\,Cos.NST}\ ;$$

cet angle pourra donc être regardé comme donné, dès que l'on connaîtra l'inclinaison MNL de l'orbite, les deux rayons vecteurs $ST=a$ et $SM=r$, et les angles TSN, MSN qu'ils font avec la ligne des nœuds. On n'aura qu'à retrancher ensuite cet angle NSZ de la longitude ESN du nœud, pour avoir la longitude géocentrique ESZ.

41. Après la recherche de la longitude, celle de la latitude est très-facile. Des deux triangles LTP, rectangle en P, et MLT, rectangle en L, on tire les deux égalités qui suivent

$$NO=LP=LT\,Cos.TLP=LT\,.\,Cos.NSZ\ ,$$

$$LM=LT\,.\,Tang.MTL\ ;$$

d'où

$$Tang.\mathrm{MTL}=\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{NO}}\,Cos.\mathrm{NSZ}=\frac{r.Sin.\mathrm{MSN}.Sin.\mathrm{MNL}.Cos.\mathrm{TLP}}{r.Cos.\mathrm{MSN}-a.Cos.\mathrm{NST}}\ .$$

Et telle est la tangente de la latitude géocentrique.

42. Il reste donc à exprimer les angles NST, MSN, MLN, ainsi que les rayons vecteurs a et r, en d'autres quantités qui, d'après l'énoncé de notre problème, doivent être regardées comme données: et ce sont les élémens de l'orbite de l'astre. Soient donc

δ, l'angle ESM, longitude du nœud;

β, l'angle MNL, inclinaison de l'orbite;

ι, l'angle BSN que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides;

b, le demi-grand axe de la planète ou comète;

Sin.μ, le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; ce qui donne

bCos.μ, pour le demi-petit axe;

bSin.μ, pour la distance du foyer au centre;

a, le demi-grand axe de la terre;

p, le temps périodique de la terre;

q, le temps périodique de l'astre;

p est connu et, quant à q, nous savons qu'on a

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{a^3}{b^3}\ ;$$

ainsi, les deux quantités désignées par b et q pourront toujours être remplacées l'une par l'autre.

43. A ces cinq élémens, savoir δ, β, ι, μ, b, il faut en ajouter un sixième: c'est celui qui doit fixer le moment du passage de l'astre par son aphélie. Nous supposerons donc qu'à cet instant la terre était au point A de son orbite. Notre sixième élément sera donc l'angle ASN$=\nu$ que faisait alors la ligne des nœuds SN avec le rayon vecteur SA de la terre.

44. En continuant de désigner par φ l'anomalie vraie de l'astre, nous emploîrons la lettre $\varkappa$ pour exprimer l'anomalie excentrique qui lui appartient. La longitude de la terre, supposée au point T

de son orbite, ou l'angle EST, sera désignée par ε, ce qui rend l'angle $\mathrm{NST}=\varepsilon-\delta$, et l'angle $\mathrm{AST}=\varepsilon-\delta-\eta$. Le temps employé par la terre à parcourir l'arc AT sera donc $\frac{p(\varepsilon-\delta-\eta)}{2\pi}$; et, comme l'astre emploîra le même temps pour parcourir l'arc BM de la sienne (B étant le lieu de son aphélie), et pour décrire ainsi l'anomalie vraie $\mathrm{BSM}=\varphi$, à laquelle répond l'anomalie excentrique κ, et le rayon vecteur $\mathrm{SM}=r$, on aura les équations qui suivent :

$$r=\frac{b\mathrm{Cos.}^2\mu}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi},\ \mathrm{Sin.}\kappa=\frac{\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\varphi}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi},\ \mathrm{Cos.}\kappa=\frac{\mathrm{Cos.}\varphi-\mathrm{Sin.}\mu}{1-\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\varphi},$$

$$p(\varepsilon-\delta-\eta)=q(\kappa+\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Sin.}\kappa).$$

45. Il paraît convenable de réduire toutes les formules aux anomalies excentriques et d'éliminer entièrement les anomalies vraies. Cette réduction est facile; nous aurons

$$r=b(1+\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\kappa)$$

$$\mathrm{Sin.}\varphi=\frac{\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\kappa}{1+\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\kappa},\quad \mathrm{Cos.}\varphi=\frac{\mathrm{Cos.}\kappa+\mathrm{Sin.}\mu}{1+\mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\kappa},$$

$$r\mathrm{Sin.}\varphi=b\mathrm{Cos.}\mu\mathrm{Sin.}\kappa,\quad r\mathrm{Cos.}\varphi=b(\mathrm{Cos.}\kappa+\mathrm{Sin.}\mu).$$

46. En conséquence, si l'on désigne finalement

par A la longitude géocentrique,

par B la latitude géocentrique de l'astre au moment où la terre est parvenue au point T de son orbite; l'angle $\mathrm{TLP}=\mathrm{NSZ}$ sera $\delta-A$; l'angle NST, que fait le rayon vecteur ST avec la ligne des nœuds SN, sera $\varepsilon-\delta$; l'angle MSN que fait avec cette même ligne SN le rayon vecteur SM de l'astre sera $\iota+\varphi$; l'angle MTL sera B, et l'angle MNL, qui exprimera l'inclinaison de l'orbite sera β. Les formules des n.^{os} 40 et 41, qui nous faisaient connaître les tangentes des deux angles $\delta-A$ et B deviendront ainsi

$$\mathrm{Tang.}(\delta-A)=\frac{a\mathrm{Sin}(\varepsilon-\delta)-r\mathrm{Sin.}(\iota+\varphi)\mathrm{Cos.}\beta}{r\mathrm{Cos.}(\iota+\varphi)-a\mathrm{Cos.}(\varepsilon-\delta)},$$

$$\text{Tang.}B=\frac{r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\text{Cos.}(\delta-A)\text{Sin.}\beta}{r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)-a\text{Cos.}(\theta-\delta)}\;.$$

46. Multipliant ces deux équations par le dénominateur commun des fractions qui forment leurs seconds membres, elles deviendront en réduisant

$$a\text{Sin.}(\theta-\text{A})=r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\text{Sin.}(\delta-\text{A})+r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\text{Cos.}(\delta-\text{A})\text{Cos.}\beta.$$
$$a\text{Tang.}B\text{Cos.}(\theta-\delta)=r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\text{Tang.}B-r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\text{Cos.}(\delta-\text{A})\text{Sin.}\beta.$$

47. Arrêtons-nous à ces deux produits $r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)$ et $r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)$, qui font fonction de facteurs dans ces deux formules, et qui ne sont autre chose que les deux coordonnées rectangulaires SN, MN du point M de l'ellipse rapportées au foyer S comme origine, et à la ligne des nœuds SN comme axe. En les désignant respectivement par bP et bQ, et en employant les développemens donnés au n.° 45, nous aurons

$$P=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\kappa)\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\;,$$
$$Q=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\kappa)\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\;;$$

ou bien

$$P=\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\kappa-\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\kappa\text{Cos.}\mu\;,$$
$$Q=\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\kappa+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\kappa\text{Cos.}\mu\;.$$

En employant cette notation, on aura

$$a\text{Sin.}(\theta-A)=bP\text{Sin.}(\delta-A)+bQ\text{Cos.}(\delta-A)\text{Cos.}\beta\;;$$
$$a\text{Cos.}(\theta-\delta)\text{Tang.}B=bP\text{Tang.}B-bQ\text{Cos.}(\delta-A)\text{Sin.}\beta.$$

La ligne MT, distance de l'astre à la terre, égale à $\frac{\text{LM}}{\text{Sin.}B}=\frac{r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}B}$, deviendra, par cette même notation, $\frac{bQ\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}B}$.

48. Si on multiplie la première de ces équations par $\text{Sin.}\beta$, l'autre par $\text{Cos.}\beta$, et qu'on les ajoute ensemble, on aura une nouvelle équation débarrassée de Q et ne renfermant que P seul. Multipliant de même la première par $\text{Tang.}B$, la seconde par $\text{Sin.}(\delta-A)$ et

les ôtant l'une de l'autre, en remarquant que $(\theta - A) = (\theta - \delta) + (\delta - A)$, ce qui rend $\text{Sin.}(\theta - A) - \text{Cos.}(\theta - \delta)\text{Sin.}(\delta - A) = \text{Sin.}(\theta - \delta)\text{Cos.}(\delta - A)$, on aura une nouvelle équation débarrassée de P, et ne renfermant plus que Q. Ces deux équations seront

$$\frac{bP}{a} = \frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta - \delta) + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta - A)\text{Cot.}B},$$

$$\frac{bQ}{a} = \frac{\text{Sin.}(\theta - \delta)}{\text{Cos.}\beta + \text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta - A)\text{Cot.}B}.$$

Leur forme nous met dans le cas de procéder par degrés à la solution du problème, en le partageant dans les trois qui suivent:

49. *PROBLÈME VI. La position du plan de l'orbite étant supposée connue, et connaissant de plus le grand axe de l'ellipse, et l'instant du passage par l'une des deux apsides; on demande de déterminer, moyennant une seule observation, l'excentricité et la position de l'axe?*

50. *Solution.* Les quantités connues du problème seront ainsi: l'angle δ, longitude du nœud; l'angle β inclinaison de l'orbite; les angles A et B, ou la longitude et la latitude géocentriques, données par l'observation; l'angle θ, longitude de la terre dans ce même instant; l'angle η que faisait la ligne des nœuds avec le rayon vecteur de la terre, au moment du passage de l'astre par son aphélie; enfin le demi-grand axe b de l'orbite, et par conséquent la fraction $\frac{b}{a}$. Les deux inconnues sont l'excentricité μ et l'angle ϵ que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides.

51. Les deux équations données (48) nous mettent dans le cas de déterminer immédiatement les deux facteurs P et Q. De plus, l'angle η étant supposé connu, on aurait, pour déterminer l'anomalie excentrique $\varkappa$, l'équation (44)

$$p(\theta - \delta - \eta) = q(\varkappa + \text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa)$$

qui, outre cette anomalie, renferme encore l'excentricité μ, inconnue comme elle. Heureusement elle y est réductible; car ayant (47)

$$P=(1+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Cos.}\varkappa)\mathrm{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$
$$Q=(1+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Cos.}\varkappa)\mathrm{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$

on en tire

$$1+\mathrm{Sin.}\mu\,\mathrm{Cos.}\varkappa=\sqrt{P^2+Q^2}\ ;$$

quantité entièrement connue. En la désignant donc par R, on obtient

$$\mathrm{Sin.}\mu=\frac{R-1}{\mathrm{Cos.}\varkappa}\ ,$$

ce qui change notre dernière équation en

$$p(\theta-\delta-\eta)=q[\varkappa+(R-1)\mathrm{Tang.}\varkappa].$$

On en tirera l'anomalie $\varkappa$ par une simple application de la règle de fausse position ; et, après l'avoir trouvée, il ne restera plus que le seul angle ε à déterminer. Or, des deux équations (47)

$$P=\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\mu+\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\varkappa-\mathrm{Sin}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\mu\ ,$$
$$Q=\mathrm{Sin.}\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\mu+\mathrm{Sin.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\varkappa+\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\mu\ ;$$

on tire

$$P\mathrm{Cos.}\varepsilon+Q\mathrm{Sin.}\varepsilon=\mathrm{Sin.}\mu+\mathrm{Cos.}\varkappa\ ,$$
$$Q\mathrm{Cos.}\varepsilon-P\mathrm{Sin.}\varepsilon=\mathrm{Sin.}\varkappa+\mathrm{Cos.}\mu\ ;$$

ce qui donne

$$R\mathrm{Cos.}\varepsilon=P(\mathrm{Sin.}\mu+\mathrm{Cos.}\varkappa)+Q\mathrm{Sin.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\mu\ ,$$
$$R\mathrm{Sin.}\varepsilon=Q(\mathrm{Sin.}\mu+\mathrm{Cos.}\varkappa)-P\mathrm{Sin.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\mu\ ;$$

Le problème sera ainsi résolu. Il pourra servir à déterminer, dans les orbes planétaires, le lieu de l'aphelie et l'excentricité, les autres élémens étant supposés connus.

52. *PROBLÈME VII. Connaissant la position du plan de l'orbite, on demande de déterminer, moyennant deux observations, les quatre élémens qui restent ; savoir : l'instant du passage par l'aphélie, ou l'angle η ; la position de la ligne des apsides, ou l'angle ε ; l'excentricité de l'orbite, ou l'angle μ ; enfin le demi-grand*

grand axe b, *duquel dépend le rapport des deux temps périodiques* p *et* q *au moyen de l'équation* $p^2b^3=q^2a^3$?

53. *Solution*. En conservant, pour la première observation, les notations du problème precedent, on marquera par un accent celles qui se rapportent à la seconde. On désignera donc

par A, A' les deux longitudes géocentriques;

par B, B' les deux latitudes géocentriques;

par $\varkappa$, $\varkappa'$ les deux anomalies excentriques;

par r, r' les deux rayons vecteurs.

On aura ainsi

$$r=b(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa)\quad,\quad r'=b(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa').$$

54. Les lettres P, P', Q, Q' désigneront encore les fonctions trigonométriques qui suivent

$$\begin{aligned}
P&=\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa-\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\varkappa\,\text{Cos.}\mu\ ,\\
P'&=\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa'-\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\varkappa'\text{Cos.}\mu\ ,\\
Q&=\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\varkappa\,\text{Cos.}\mu\ ,\\
Q'&=\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa'+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\varkappa'\text{Cos.}\mu\ .
\end{aligned}$$

55. On aura donc, en vertu de (48),

$$\begin{aligned}
\frac{bP}{a}&=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta-A)\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ ,\\
\frac{bP'}{a}&=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta'-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta'-A')\text{Cot.}B'}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A')\text{Cot.}B'}\ ;\\
\frac{bQ}{a}&=\frac{\text{Sin.}(\theta-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ ,\\
\frac{bQ'}{a}&=\frac{\text{Sin.}(\theta'-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A')\text{Cot.}B'}\ .
\end{aligned}$$

56. Ainsi, la position du plan de l'orbite étant supposée connue, on pourra regarder comme connues les quatre fractions $\frac{bP}{a}$, $\frac{bP'}{a}$, $\frac{bQ}{a}$, $\frac{bQ'}{a}$; mais le rapport $\frac{b}{a}$ est une des inconnues

du problème ; ce qui porte à *cinq* le nombre de celles que renferment les quatre équations précédentes.

57. La *sixième* inconnue, c'est l'angle η, qui fixe l'instant du passage par l'aphélie. La théorie de l'ellipse fournit les deux équations (44)

$$p(\theta-\delta-\eta)=q(\varkappa+\text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\varkappa)\,,\quad p(\theta'-\delta-\eta)=q(\varkappa'+\text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\varkappa')\,;$$

desquelles on tire, par une simple soustraction,

$$p(\theta'-\theta)=q[(\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)].$$

L'angle η étant ainsi déterminé, le nombre des équations, de même que celui des inconnues, se trouvera de nouveau réduit à *cinq*.

58. Les *quatre* équations de (54) pourront être réduites à *trois*, par l'élimination de l'angle ε. On a d'abord (51)

$$R=1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa\,,\quad R'=1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa'\,;$$

d'où l'on tire

$$R-R'=\text{Sin.}\mu(\text{Cos.}\varkappa-\text{Cos.}\varkappa')\,,$$

$$R+R'=2+\text{Sin.}\mu(\text{Cos.}\varkappa+\text{Cos.}\varkappa')\,,$$

$$RR'=1+\text{Sin.}\mu(\text{Cos.}\varkappa+\text{Cos.}\varkappa')+\text{Sin.}^2\mu\,\text{Cos.}\varkappa\,\text{Cos.}\varkappa'.$$

59. Il conviendra de remarquer les deux expressions littérales de $PQ'-P'Q$ et de $PP'+QQ'$, que l'on obtiendra encore, entièrement débarrassées de l'angle ε, à l'aide des formules données (47) ; savoir

$$P=(1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa)\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\,,\quad Q=(1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa)\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\,,$$

$$P'=(1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa')\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi')\,,\quad Q'=(1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varkappa')\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi')\,;$$

il en résulte

$$PQ'-P'Q=RR'\text{Sin.}(\varphi'-\varphi)\,,$$

$$PP'+QQ'=RR'\text{Cos.}(\varphi'-\varphi)\,;$$

d'où l'on obtient la formule simple et remarquable

$$\text{Tang.}(\varphi'-\varphi)=\frac{PQ'-P'Q}{PP'+QQ'}\,.$$

Ainsi donc, ayant trouvé, à l'aide des formules (55), les quantités P, P', Q, Q', multipliées par le facteur $\frac{b}{a}$ qui, quoiqu'inconnu, est commun à toutes, et disparaît dans la division, on en tirera immédiatement l'angle $\varphi'-\varphi$; c'est l'angle décrit par le rayon vecteur de la comète, dans l'intervalle de temps qui sépare les deux observations.

60. Si l'on développe les sinus et cosinus de $\varphi'-\varphi$, en réduisant tout aux anomalies excentriques, moyennant les formules (45), on en déduira les deux qui suivent :

$$PQ'-P'Q=[\text{Sin.}(x'-x)+(\text{Sin.}x'-\text{Sin.}x)\text{Sin.}\mu]\text{Cos.}\mu\ ,$$
$$RR'-PP'-QQ'=[1-\text{Cos.}(x'-x)]\text{Cos.}^2\mu.$$

61. Pour donner à nos formules encore plus de simplicité, faisons

$$x'+x=2\chi\ ,\quad x'-x=2\chi\ ;$$

d'où

$$x'=\chi+\psi\ ,\quad x=\chi-\psi\ ;$$

il en résultera

$$\text{Sin.}x'+\text{Sin.}x=2\text{Sin.}\chi\text{Cos.}\psi\ ,\ \text{Sin.}x'-\text{Sin.}x=2\text{Cos.}\chi\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$\text{Cos.}x-\text{Cos.}x'=2\text{Sin.}\chi\text{Sin.}\psi\ ,\ \text{Cos.}x+\text{Cos.}x'=2\text{Cos.}\chi\text{Cos.}\psi\ ;$$

et par conséquent

$$R-R'=2\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\chi\,.\,\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$R+R'-2=2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi\text{Cos.}\psi\ ,$$
$$PQ'-P'Q=2\text{Cos.}\mu\text{Siu.}\psi(\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi)\ ,$$
$$RR'-PP'-QQ'=2\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

la dernière des équations (57) prendra alors la forme

$$p(\theta'-\theta)=q(2\psi+2\text{Sin}\ \mu\text{Cos.}\chi\text{Sin.}\psi)\ ,$$

et comme

$$R+R'-2=2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi\text{Cos.}\psi\ ,$$

elle deviendra finalement

$$p(\theta'-\theta)=q[2\psi+(R+R'-2)\text{Tang.}\psi]$$

62. Mais n'oublions pas que la fraction $\frac{b}{a}$, qui multiplie P, P', Q, Q', dans les formules (55), est elle-même une de nos inconnues. Faisons, pour abréger, $\frac{a}{b}=n$; faisons de plus

$$P=nM\ ,\quad Q=nN\ ,\quad R=nO\ ,$$
$$P'=nM'\ ,\quad Q'=nN'\ ,\quad R'=nO'\ ,$$

Les quantités M, N, O, M', N', O' seront alors celles qu'on aura pu immédiatement déduire des formules (55), et que, par conséquent, on pourra regarder comme connues, tandis qu'il faudra considérer comme inconnue la fraction $\frac{a}{b}=n$, de même que $\frac{p}{q}=\sqrt{n^3}$.

Les équations du numéro précédent deviendront donc

$$n(O-O')=2\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa\text{Sin.}\psi\ , \qquad (1)$$
$$n(O+O')-2=2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa\text{Cos.}\psi\ ,$$
$$n^2(MN'-M'N)=2\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa)\ , \qquad (2)$$
$$n^2(O'O-MM'-NN')=2\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi\ , \qquad (3)$$
$$(\theta'-\theta)\sqrt{n^3}=2\psi+[n(O+O')-2]\text{Tang.}\psi. \qquad (4)$$

63. Ce sont là les équations desquelles dépend la solution du problème. Il faut employer la règle de fausse position; et, pour éviter les équations au-dessus du second degré, il faut commencer par supposer une valeur numérique à l'angle $\varkappa$. A l'aide de cet angle, on déterminera l'excentricité μ. Pour cela, on divisera le quarré de l'équation (1) par l'équation (3), ce qui donnera

$$\text{Tang.}^2\mu=\frac{(O-O')^2}{2(OO'-MM'-NN')\text{Sin.}^2\varkappa}\ .$$

64. De là, on passera à l'angle ψ. Posant, pour abréger,

$$\frac{OO'-MM'-NN'}{MN'-M'N}=h\ ,$$

et divisant la troisième équation par la seconde, il viendra

$$\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\psi-h\,\text{Cos.}\psi=h\,\text{Sin}\,\mu\,\text{Cos.}\chi\ ;$$

équation où l'on traitera l'angle ψ comme l'inconnue, et que l'on résoudra par les méthodes connues (*). De plus, cet angle ψ étant la demi-différence des deux anomalies excentriques, pour peu que ces deux anomalies ne soient pas très-éloignées l'une de l'autre, il sera assez petit pour que son cosinus puisse être confondu avec l'unité, sans erreur sensible, sur-tout s'il faut vérifier le premier essai d'une règle de fausse position. On aura ainsi

$$\text{Sin.}\psi=\frac{h(1+\text{Sin}\,\mu\,\text{Cos.}\chi)}{\text{Cos.}\mu}\ .$$

65. A l'aide des trois angles χ, μ, ψ, on aura, par l'équation (1)

$$n=\frac{2\,\text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\chi\,\text{Sin.}\psi}{O-O'}\ .$$

Substituant ensuite les valeurs numériques des quatre quantités dans l'équation (4), on s'assurera de la différence entre deux quantités qui, dans le cas d'une supposition exacte pour χ, devraient être rigoureusement égales. Une seconde supposition donnera un nouveau résultat qui, comparé au premier, servira à diriger les suppositions ultérieures, et à conduire, par quelques essais, et par l'application des méthodes usitées en pareille rencontre, à une valeur suffisamment approchée de χ ; et, par suite, à celles de μ, ψ et n.

66. Les deux anomalies excentriques x, x' se trouveront ensuite par les formules (60) ; savoir :

$$x=\chi-\psi\quad,\qquad x'=\chi+\psi.$$

L'angle ε se déduira de l'une des deux équations (57)

$$(t-\vartheta-\varepsilon)\sqrt{n^3}=x+\text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}x\ ,$$
$$(t'-\vartheta-\varepsilon)\sqrt{n^3}=x'+\text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}x'.$$

Il restera donc à connaître le seul angle ε ; et on aura pour le déterminer, l'une des quatre équations (54).

67. Telle est donc la solution du problème, dans le cas où la

(*) Voyez la page 84 du 2.e volume de ce recueil. J. D. G.

position du plan de l'orbite peut être supposée connue. Il est très-possible de déterminer cette position à part, indépendamment des autres élémens de cette orbite; les méthodes qui y conduisent sont assez connues; et elles sont encore susceptibles d'être perfectionnées. Toutefois nous donnerons, dans un prochain mémoire, la solution générale et complète du problème.