
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PENJON

Arithmétique. Essai sur la transformation des fractions

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 265-272

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__265_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ARITHMÉTIQUE.

Essai sur la transformation des fractions ;

Par M. PENJON, professeur de mathématiques au lycée
d'Angers.



IL est connu, depuis long-temps, que, par un procédé analogue à celui qu'on emploie pour le développement d'une fraction en parties décimales, toute fraction peut être développée en une suite, finie ou infinie, d'autres fractions dont les dénominateurs sont les puissances successives d'un même nombre donné quelconque (*). Je vais essayer de compléter ici la théorie de ces sortes de développemens.

1. Soit $\frac{A}{B}$ une fraction proprement dite que nous supposons essentiellement réduite à ses moindres termes ; et soit b un nombre entier quelconque. Soient, de plus, $q_1, q_2, q_3, \dots, r_1, r_2, r_3, \dots$ les quotiens et les restes que l'on obtient successivement, en divisant bA, br_1, br_2, \dots par B ; on aura

$$\left. \begin{aligned} bA &= Bq_1 + r_1, \\ br_1 &= Bq_2 + r_2, \\ br_2 &= Bq_3 + r_3, \\ br_3 &= Bq_4 + r_4, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (a)$$

(*) Voyez, entre autres, le *Complément d'algèbre* de M. Lacroix.
Tom. IV, n.º 13, 1.º mars 1814.

Dans ces équations, les restes r_1, r_2, r_3, \dots étant tous nécessairement moindres que B , et ne pouvant être conséquemment que quelques-uns des nombres $1, 2, 3, \dots, (B-2), (B-1)$; il s'ensuit qu'à moins que quelqu'un des B premiers ne soit nul, auquel cas tous les suivans le seraient aussi, après un nombre de divisions tout au plus égal à $B-1$, on devra retomber sur quelqu'un des restes déjà obtenus. Or, l'inspection des équations (α) suffit pour faire voir que le procédé par lequel on déduit chacun des restes $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ ainsi que chacun des quotiens $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ de celui qui le précède immédiatement est uniforme; d'où il suit que si, par exemple, le reste r_k est égal au reste r_g , les reste et quotient r_{k+1} et q_{k+1} seront respectivement égaux aux reste et quotient r_{g+1} et q_{g+1} ; qu'il en sera de même des reste et quotient r_{k+2} et q_{k+2} comparés aux reste et quotient r_{g+2} et q_{g+2} , et ainsi de suite; c'est-à-dire, que, si les deux suites $r_1, r_2, r_3, \dots, q_1, q_2, q_3, \dots$ ne se terminent pas d'elles-mêmes, elles seront nécessairement périodiques, soit immédiatement, soit à partir d'un terme dont le rang ne surpassera pas $B-1$; de manière que, dans tous les cas, le nombre des termes qui précéderont les périodes augmentées du nombre de ceux de l'une des périodes, sera toujours moindre que B . On peut même observer que le cas où les deux suites se termineraient d'elles-mêmes ne fait point exception à la règle, attendu que la suite $0, 0, 0, \dots$ est elle-même périodique.

2. Si, après avoir mis les équations (α) sous cette forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{r_1}{bB}, \\ \frac{r_1}{bB} &= \frac{q_2}{b^2} + \frac{r_2}{b^2B}, \\ \frac{r_2}{b^2B} &= \frac{q_3}{b^3} + \frac{r_3}{b^3B}, \\ \frac{r_3}{b^3B} &= \frac{q_4}{b^4} + \frac{r_4}{b^4B}, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned} \right\} (\beta)$$

on prend successivement la première, puis la somme des deux premières, puis la somme des trois premières, et ainsi de suite, en supprimant les termes communs aux deux membres des équations résultantes, il viendra

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{r_1}{bB}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{r_2}{b^2B}; \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{r_3}{b^3B}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{q_4}{b^4} + \frac{r_4}{b^4B}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (7)$$

En observant que les derniers termes

$$\frac{r_1}{bB}, \frac{r_2}{b^2B}, \frac{r_3}{b^3B}, \frac{r_4}{b^4B}, \dots$$

de ces suites sont continuellement décroissans, on en conclura qu'on peut écrire, par approximation,

$$\frac{A}{B} = \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \frac{q_4}{b^4} + \dots; \quad (8)$$

développement qui donnera une valeur d'autant plus approchée de la fraction $\frac{A}{B}$ qu'on en prendra un plus grand nombre de termes, et qu'en même temps b sera plus grand. A l'avenir nous appellerons ce nombre arbitraire b la base du développement de $\frac{A}{B}$.

3. Il s'agit présentement, 1.° d'assigner les caractères auxquels on pourra reconnaître à l'avance si le développement se terminera ou si, au contraire, il se prolongera indéfiniment; 2.° de reconnaître quand ce développement devra être immédiatement périodique ou avoir ses périodes précédées de termes n'en faisant pas partie;

3° enfin de déterminer généralement tant le nombre des termes des périodes que celui des termes de la partie non périodique dont elles se trouvent précédées.

4. Pour y parvenir, soient désignés généralement par m le nombre des termes qui précèdent la première période, et par n le nombre des termes dont chaque période est composée; auquel cas on devra avoir $m+n < B$; il est clair qu'alors on pourra écrire

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{b^2} + \frac{q_3}{b^3} + \dots + \frac{q_m}{b^m} \\ &+ \frac{q_{m+1}}{b^{m+1}} + \frac{q_{m+2}}{b^{m+2}} + \frac{q_{m+3}}{b^{m+3}} + \dots + \frac{q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ &+ \frac{q_{m+n+1}}{b^{m+n+1}} + \frac{q_{m+n+2}}{b^{m+n+2}} + \frac{q_{m+n+3}}{b^{m+n+3}} + \dots + \frac{q_{m+2n}}{b^{m+2n}} \\ &+ \frac{q_{m+2n+1}}{b^{m+2n+1}} + \frac{q_{m+2n+2}}{b^{m+2n+2}} + \frac{q_{m+2n+3}}{b^{m+2n+3}} + \dots + \frac{q_{m+3n}}{b^{m+3n}} \\ &+ \dots \end{aligned} \right\} (\varepsilon)$$

ou encore

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m}{b^m} \\ &+ \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+n}} \\ &+ \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+2n}} \\ &+ \frac{q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}}{b^{m+3n}} \\ &+ \dots ; \end{aligned} \right\} (\xi)$$

posant donc, pour abrégier

$$q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m = M, \quad (\eta)$$

$$q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n} = N; \quad (\theta)$$

il viendra enfin

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} + \frac{N}{b^{m+2n}} + \frac{N}{b^{m+3n}} + \dots \\ &= \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{b^n}\right) + \left(\frac{1}{b^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{b^n}\right)^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b^n}} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} \cdot \frac{b^n}{b^n - 1}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire ,

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^m(b^n - 1)} = \frac{M(b^n - 1) + N}{b^m(b^n - 1)}. \quad (*)$$

5. Cela posé , soit mise l'équation (*) sous cette forme

$$\frac{Ab^{m(b^n - 1)}}{B} = M(b^n - 1) + N. \quad (\lambda)$$

Il faut que le premier membre de cette équation soit un nombre entier ; et , comme B et A sont supposés premiers entre eux , il s'ensuit que $b^m(b^n - 1)$ doit être divisible par B . Soit donc fait $B = CD$: C étant le produit des facteurs premiers de B qui se trouvent dans b , et D le produit de ceux qui ne s'y trouvent pas. Attendu que b^m et $b^n - 1$ sont nécessairement premiers entre eux , il faudra que

$$\frac{b^m}{C} \quad \text{et} \quad \frac{b^n - 1}{D},$$

soient séparément des nombres entiers. Ainsi , 1.° le dénominateur de la fraction génératrice ne saurait renfermer aucun des facteurs premiers de la base de son développement à une puissance supérieure à celle dont l'exposant est le nombre de fois que ce facteur premier se trouve dans la base , multiplié par le nombre des termes qui précèdent la première période ; 2.° le produit des facteurs premiers du dénominateur de la fraction génératrice qui sont étrangers à la base de son développement , est toujours diviseur d'un nombre moindre d'une unité que la puissance de cette base dont le degré est marqué par le nombre des termes des périodes.

6. Dans le cas où le développement se termine , et où conséquemment $N=0$, on a simplement

$$\frac{Ab^m}{B} = M ;$$

d'où l'on voit qu'alors b^m doit être exactement divisible par B ; et dans le cas où ce développement est immédiatement périodique , et où conséquemment $M=0$, on a simplement

$$\frac{A(b^n-1)}{B} = N ;$$

d'où l'on voit qu'alors b^n-1 doit être exactement divisible par B . Ainsi , 1.° lorsque le développement de la fraction génératrice se termine , son dénominateur est diviseur exact de quelque puissance de la base de ce développement , c'est-à-dire , qu'il ne contient aucun facteur premier étranger à cette base ; 2.° lorsque ce développement est immédiatement périodique , le dénominateur de la fraction génératrice , premier à la base , est nécessairement diviseur exact de quelque nombre moindre d'une unité qu'une puissance de cette base. (*)

7. Soit toujours $B=CD$, C et D étant les mêmes que ci-dessus (5). Soit m la moindre des puissances b qui soit divisible par C , et soit n la moindre des puissances de ce même nombre b qui , diminuée d'une unité , devienne divisible par D ; il suit de ce qui a été dit ci-dessus , que le développement de $\frac{A}{B}$ suivant la base b ne pourra avoir moins de m termes avant la première période , ni moins de n termes à chaque période. Nous allons prouver de

(*) De là résulte ce théorème : a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux , l'équation

$$b^x-1=ay$$

est toujours résoluble en nombres entiers.

plus que ce développement aura précisément m termes avant sa première période, et que ses périodes seront précisément de n termes; et nous donnerons en même temps un procédé différent du premier pour exécuter ce même développement.

8. Soient faits

$$CC' = b^m, DD' = b^n - 1, \text{ d'où } CDC'D' = BC'D' = b^m(b^n - 1),$$

on aura alors

$$\frac{A}{B} = \frac{AC'D'}{BC'D'} = \frac{AC'D'}{b^m(b^n - 1)}.$$

Soit divisé $AC'D'$ par $b^n - 1$, et soient M le quotient et N le reste de cette division; nous aurons alors

$$\frac{A}{B} = \frac{M(b^n - 1) + N}{b^m(b^n - 1)} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^m(b^n - 1)},$$

ou encore

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{b^m} + \frac{N}{b^{m+n}} + \frac{N}{b^{m+2n}} + \frac{N}{b^{m+3n}} + \dots \dots \dots \quad (\mu)$$

Soit divisé $m - 1$ fois consécutivement M par b , le quotient par b , le nouveau quotient par b , et ainsi de suite, en ne prenant que les quotiens entiers; soient $q_m, q_{m-1}, q_{m-2}, \dots, q_2$ les restes de ces divisions et $Q_{m-1}, Q_{m-2}, Q_{m-3}, \dots, q_1$ leurs quotiens, nous aurons

$$\begin{aligned} M &= Q_{m-1}b + q_m, \\ Q_{m-1} &= Q_{m-2}b + q_{m-1}, \\ Q_{m-2} &= Q_{m-3}b + q_{m-2}, \\ &\dots \dots \dots, \\ Q_2 &= q_1b + q_2, \\ q_1 &= 0 + q_1, \end{aligned}$$

en prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $1, b, b^2, b^3, \dots, b^{m-1}$, et réduisant, il viendra

$$M = q_1 b^{m-1} + q_2 b^{m-2} + q_3 b^{m-3} + \dots + q_m \quad (\gamma)$$

En opérant de la même manière sur N , faisant $n-1$ divisions seulement, désignant par $q_{m+n}, q_{m+n-1}, q_{m+n-2}, \dots, q_{m+2}$ les restes successifs et par q_{m+1} le dernier quotient, on aura pareillement

$$N = q_{m+1} b^{n-1} + q_{m+2} b^{n-2} + q_{m+3} b^{n-3} + \dots + q_{m+n}; \quad (\xi)$$

Substituant enfin ces valeurs de M et N dans l'équation (μ) , elle prendra d'abord la forme (ξ) et ensuite la forme (ϵ) ; c'est-à-dire, que le développement de la fraction $\frac{A}{B}$ suivant la base b se trouvera être exactement conditionné comme nous l'avons annoncé.

9. Il convient au surplus d'observer que la recherche des nombres C, D, m, n n'exige nullement la décomposition de B en facteurs premiers. En cherchant successivement le plus grand commun diviseur entre B et b, b^2, b^3, \dots jusqu'à ce qu'on rencontre deux puissances consécutives pour lesquelles ce diviseur soit le même; l'exposant de la moins élevée sera m , et le diviseur sera C . En divisant B par C , le quotient sera D ; enfin, en divisant successivement par D les binômes $b-1, b^2-1, b^3-1, \dots$, jusqu'à ce qu'on en rencontre un pour lequel la division réussisse, l'exposant de b dans ce binôme sera la valeur de n .

10. Pour donner un exemple de ce procédé, proposons-nous de développer la fraction $\frac{7}{17}$ suivant la base 3. Nous aurons ici $m=2, C=9, n=2, D=8$; d'où $C'=1, D'=1, AC'D'=7$; donc $q_1=0, q_2=0, q_3=2, q_4=1, q_5=2, q_6=1, \dots$, et partant

$$\frac{7}{17} = \frac{0}{3} + \frac{0}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{243} + \frac{1}{729} + \dots$$

11. L'application de tout ce qui précède au développement des fractions en parties décimales est trop facile pour que nous croyons nécessaire de nous y arrêter.

CHRONOLOGIE.