
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Questions résolues. Démonstration du premier des deux
théorèmes énoncés à la page 196 de ce volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 379-381

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__379_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Démonstration du premier des deux théorèmes énoncés
à la page 196 de ce volume ;*

Par M. B.***, abonné.



THÉORÈME. *Deux hexagones étant tracés arbitrairement sur le plan d'une section conique ;*

1.^o *Si les sommets de l'un sont respectivement les pôles des côtés de l'autre, les sommets de ce dernier seront réciproquement les pôles des côtés du premier.*

2.^o *Si, en outre, les points de concours des prolongemens des côtés opposés de l'un des deux sont tous trois situés sur une même ligne droite, les diagonales joignant les sommets opposés de l'autre se couperont toutes trois au même point, qui sera le pôle de cette droite et réciproquement.*

Démonstration. Soient $ABCDEF$, $abcdef$ les deux hexagones proposés.

1.^o Supposons que a soit le pôle de AB et b le pôle de BC , il s'ensuivra que tous les angles circonscrits à la courbe dans lesquels la corde de contact passera par a , auront le sommet sur AB , et que tous les angles circonscrits à la même courbe, dont la corde de contact passera par b , auront leur sommet sur BC ; donc l'angle circonscrit dont la corde de contact passera à la fois par a et b , aura à la fois son sommet sur AB et sur BC ; ce sommet sera donc en B ; le sommet B sera donc le pôle du côté ab .

On démontrera de la même manière que, si les sommets c, d, e, f

sont respectivement les pôles de CD , DE , EF , FA , les sommets C , D , E , F , A seront respectivement les pôles de bc , cd , de , ef , fa , ce qui établit la vérité de la première partie du théorème.

2.° Soient G le point de concours de AB et DE , H le point de concours de BC et EF , K le point de concours de CD et FA ; supposons que les trois points G , H , K soient situés sur une même ligne droite, et soit o le pôle de cette droite.

G étant le point de concours de AB et DE , dont les pôles respectifs sont a et d , on prouvera, comme ci-dessus, que G est le pôle de la diagonale ad ; puis donc que G est sur GHK , dont le pôle est o , il s'ensuit que la diagonale ad passe par le point o . On prouvera de la même manière que les deux autres diagonales be , cf doivent passer par ce point o .

Réciproquement si les diagonales ad , be , cf se coupent en un même point o , et que leurs pôles respectifs soient G , H , K , ces trois points devront être situés sur la droite dont o est le pôle; mais G , comme pôle de ad , dont les extrémités a et d sont les pôles respectifs de AB et DE , devra être le point de concours de ces deux dernières droites. Par une raison semblable, H et K doivent être les points de concours respectifs de BC et EF , CD et FA ; ainsi ces trois points de concours sont sur la droite dont le pôle est o .

Corollaire. Si le polygone $ABCDEF$ est inscrit à la section conique, il est aisé de voir que le polygone $abcdef$ lui serait circonscrit et la toucherait aux sommets du premier, et que, réciproquement, si le polygone $abcdef$ est circonscrit à la section conique, le polygone $ABCDEF$ lui sera inscrit et aura ses sommets aux points de contact des côtés du premier avec la courbe.

Si donc il était seulement démontré que, dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des prolongemens des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite, il se trouverait établi, par ce qui précède, que, dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés, se coupent toutes trois en un même point.

Et

Et réciproquement, s'il était seulement démontré que, dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent toutes trois au même point, il se trouverait établi, par ce qui précède, que, dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des prolongemens des côtés opposés sont tous trois sur une même ligne droite.