ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. F. FRANÇAIS

Philosophie mathématique. Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 61-71

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__61_0>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires,

Par M. J. F. FRANÇAIS, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

IL est si naturel de considérer, à la fois, en géométrie, la grandeur et la position des lignes, que, dès qu'on a commencé à cultiver cette science, on a dû avoir besoin d'exprimer des rapports de grandeur et des rapports de position, entre les différentes lignes composant une figure quelconque. J'ose dire qu'il est surprenant, d'après cela, que les premiers principes de la *Géométrie de position* ne soient pas encore complètement établis. Cette assertion, elle-même, pourra, au premier abord, sembler exagerée et paradoxale ; mais j'espère que sa vérité sera mise hors de doute, par les détails qui vont suivre.

Notation 1.re. Nous représenterons ici la grandeur absolue d'une droite par une simple lettre, comme a, b, c,.....x, y, z,....; et, pour indiquer, à la fois, la grandeur et la position d'une droite, nous affecterons la lettre destinée à désigner sa valeur absolue d'un indice exprimant l'angle que fait cette droite avec une droite fixe et indéfinie, prise arbitrairement, et qui pourra être considérée comme l'axe des abscisses positives. Ainsi, par exemple, a_α, b_β, ..., x_ξ, y_υ, ...; représenteront des droites dont les grandeurs absolues sont a, b, ..., x, y, ..., et qui font, respectivement avec l'axe des x positives, des angles α, β, ..., ξ, ν, ... Cette distinction est nécessaire, afin de ne pas confondre une idée composée avec une idée simple, une grandeur donnée de position avec une grandeur absolue.

Définition 1.re. Nous appellerons *Rapport de grandeur* le rapport numérique entre les grandeurs de deux droites, et *Rapport de position* l'inclinaison des deux droites l'une vers l'autre, ou l'angle qu'elles font entre elles. Pour comparer entre elles deux droites données à la fois de grandeur et de position, il faut considérer non seulement le rapport que leurs grandeurs ont entre elles, mais encore comment ces droites sont placées l'une relativement à l'autre; c'est ce qu'exprime notre rapport de position.

Définition 2. Nous dirons que quatre droites sont *en proportion de grandeur et de position*, lorsqu'entre les deux dernières il y aura même *rapport de grandeur* et même *rapport de position* qu'entre les deux premières. Ainsi il ne suffit pas, pour qu'il y ait proportion de grandeur et de position entre quatre droites, que le rapport dit *géométrique*, entre le second antécédent et son conséquent, soit le même que celui qui existe entre le premier antécédent et son conséquent; il faut, en outre, que le rapport que nous avons appelé *rapport de position*, soit aussi le même.

Exemple. Ainsi, pour avoir la proportion de grandeur et de position $a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$, il faut qu'on ait, à la fois, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ et $\beta - \alpha = \delta - \gamma$.

Corollaire 1.er. Il suit de là que, dans une proportion de grandeur et de position, les grandeurs absolues des droites sont en *proportion géométrique*, tandis que les angles que font ces mêmes droites avec l'axe des abscisses positives sont en *proportion arithmétique*.

Corollaire 2. Il s'ensuit encore que, dans deux figures semblables, disposées d'une manière quelconque sur un même plan, les côtés homologues sont en proportion de grandeur et de position; car les grandeurs absolues de ces côtés sont en proportion géométrique, et les angles qu'ils forment deux à deux sont égaux.

Remarque. L'idée de proportionnalité, en géométrie, est fondée sur la similitude des figures ; notre définition 2.^{e} repose donc sur un principe fondamental de la géométrie ordinaire, et nous ne faisons qu'exprimer, *d'une manière explicite*, la double circonstance de la proportionnalité des côtés homologues et de l'égalité des angles compris entre ces côtés.

Définition 3. Lorsque, dans une proportion de grandeur et de position, le conséquent du premier rapport devient en même temps l'antécédent du second, la *proportion de grandeur et de position* est dite *continue* ; et une suite de termes, dont trois consécutifs quelconques forment une proportion continue de grandeur et de position, est une *progression de grandeur et de position.* Ainsi, une suite de droites en progression géométrique ordinaire ne forme une progression de grandeur et de position que lorsque les angles que les droites consécutives font entre elles sont égaux.

Exemple 1.^{er}. Pour avoir la proportion continue de grandeur et de position $a_\alpha : b_\beta :: b_\beta : c_\gamma$, il faut qu'on ait, à la fois, $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ et $\beta-\alpha=\gamma-\beta$.

Corollaire 1.^{er}. Donc, pour qu'une droite b_β soit moyenne proportionnelle de grandeur et de position entre a_α et c_γ, il faut qu'on ait $\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$; en sorte que b_β partage en deux parties égales l'angle formé par les droites a_α, c_γ.

Exemple 2. Pour avoir la progression de grandeur et de position $\div a_\alpha : b_\beta : c_\gamma \ldots l_\lambda : m_\mu$, il faut qu'on ait, à la fois, $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\ldots\ldots =\frac{m}{l}$ et $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\ldots\ldots=\mu-\lambda$.

Corollaire 2. Donc, dans une progression de grandeur et de position, les grandeurs absolues des droits sont en progression géométrique, tandis que les angles qu'elles font avec l'axe des abscisses positives croissent en progression arithmétique.

Notation 2. Nous pouvons maintenant séparer, dans la notation, ce qui est relatif à la grandeur absolue d'une droite de ce qui est relatif à sa position. D'abord on a, par la première notation $a_0 = a$, $1_0 = 1$; et ensuite on a, par la définition 2.e, $1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$, d'où l'on tire $a_\alpha = a.1_\alpha$. Ainsi, nous pourrons représenter, de grandeur et de position, la droite a_α par $a.1_\alpha$, où a est la grandeur absolue, et 1_α le signe de position.

Définition 4. Nous appellerons *Droites positives* celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de gauche à droite, et *Droites négatives* celles qui, étant parallèles à l'axe des abscisses, sont dirigées de droite à gauche. Nous appellerons, de même, *Angles positifs* ceux qui sont comptés depuis l'axe des abscisses positives, en montant, et *Angles négatifs* ceux qui sont comptés depuis le même axe, en descendant. C'est là la définition ordinaire des quantités positives et des quantités négatives en géométrie; mais, il s'en faut de beaucoup qu'on en ait tiré toutes les conséquences qu'elle est susceptible d'offrir. En combinant cette définition avec les précédentes, nous allons en déduire une manière simple, uniforme et féconde de représenter les lignes de grandeur et de position.

Corollaire. 1.er. Il suit de cette définition et de nos notations qu'on a $+1 = 1_0$, et $-1 = 1_{\pm\varpi}$, et par conséquent $+a = a \times (+1) = a.1_0$, et $-a = a \times (-1) = a.1_{\pm\varpi}$.

Corollaire 2. On sait, d'un autre côté, que $+1 = e^{0\varpi\sqrt{-1}}$, et $-1 = e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$; on a donc aussi $+a = a \times (+1) = a.e^{0\varpi\sqrt{-1}}$, et $-a = a \times (-1) = a.e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$.

Remarque. Il est vrai qu'on a plus généralement, $+1 = e^{\pm 2n\varpi\sqrt{-1}}$, et $-1 = e^{\pm(2n+1)\varpi\sqrt{-1}}$, n étant un nombre entier quelconque; mais, dans le géométrie de position, on n'a besoin que d'un seul tour de circonférence, pour déterminer la position d'une droite, ce qui suppose $n = 0$, et réduit ainsi les expressions de $+1$ et de -1 à celles du corollaire précédent.

Théorème 1.^{er}. Les quantités imaginaires, de la forme $\pm a\sqrt{-1}$ représentent, en géométrie de position, des perpendiculaires à l'axe des abscisses ; et réciproquement les perpendiculaires à l'axe des abscisses sont des imaginaires de la même forme.

Démonstration. La quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, entre $+a$ et $-a$, c'est-à-dire, entre a_0 et $a_{\pm\varpi}$; donc, d'après le corollaire 1.^{er} de la définition 3.^{e}, la valeur de cette moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, est $a_{\pm\frac{\varpi}{2}}$; c'est-à-dire, qu'elle est perpendiculaire à l'axe des abscisses, et dirigée soit en dessus soit en dessous de cet axe ; et l'on a $+a\sqrt{-1}=a_{+\frac{\varpi}{2}}$, et $-a\sqrt{-1}=a_{-\frac{\varpi}{2}}$. Réciproquement, toute perpendiculaire à l'axe des abscisses est représentée, d'après nos notations, par $a_{\pm\frac{\varpi}{2}}$: elle est, par conséquent, d'après le corollaire 1.^{er} de la définition 3, une moyenne proportionnelle entre a_0 et $a_{\pm\varpi}$, ou entre $+a$ et $-a$: elle est donc une quantité imaginaire de la forme $\pm a\sqrt{-1}$.

Corollaire 1.^{er}. Il suit de là que $\pm\sqrt{-1}$ est un signe de position qui est identique avec $1_{\pm\frac{\varpi}{2}}$.

Corollaire 2. De plus, puisqu'on a $-1=1_{\pm\varpi}=e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$, on a aussi $\pm\sqrt{-1}=1_{\pm\frac{\varpi}{2}}=e^{\pm\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}}$.

Corollaire 3. Les quantités dites *imaginaires* sont donc tout aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position qui est perpendiculaire à celle de ces dernières.

Remarque générale. Cette théorie des signes de position est une conséquence nécessaire et irrécusable des premiers principes. Elle est plus conforme aux règles d'une saine logique que la théorie ordinaire où l'on admet, un peu gratuitement ou du moins sans nécessité, deux espèces différentes de quantités positives, et autant d'espèces de quantités négatives (les abscisses et les ordonnées) ; car, dès qu'on admet la définition 4.^{e} des quantités positives et des quantités négatives ; il n'est plus permis d'en introduire d'autres qui ne soient pas comprises dans cette définition ; et l'on est obligé forcément d'admettre toutes les conséquences que cette même définition entraîne. Ces conséquences heurtent, à la vérité, les idées reçues ; mais c'est que ces idées sont fondées sur un défaut de dialectique, qui consiste à admettre deux principes, et deux principes incompatibles, là où un seul serait suffisant.

Théorème 2. Le signe de position 1_α a pour valeur $e^{\alpha\sqrt{-1}}$; c'est-à-dire, que $1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$.

Démonstration. Supposons que la demi-circonférence décrite d'un rayon $=1$ soit divisée, dans le sens des angles positifs, en m parties égales, et qu'on mène des rayons aux points de division ; ces rayons formeront, d'après la définition 3.^{e}, une progression de grandeur et de position : or, les deux termes extrêmes de cette progression étant $1_0 = +1$ et $1_\varpi = -1 = e^{\varpi\sqrt{-1}}$, les termes intermédiaires $1_{\frac{\varpi}{m}}$, $1_{\frac{2\varpi}{m}}$, $1_{\frac{3\varpi}{m}}$, ... $1_{\frac{(m-1)\varpi}{m}}$ auront pour valeurs $e^{\frac{\varpi}{m}\sqrt{-1}}$, $e^{\frac{2\varpi}{m}\sqrt{-1}}$, $e^{\frac{3\varpi}{m}\sqrt{-1}}$, ... $e^{\frac{(m-1)\varpi}{m}\sqrt{-1}}$; de sorte qu'en général on aura $1_{\frac{n\varpi}{m}} = e^{\frac{n\varpi}{m}\sqrt{-1}}$; et, comme $\frac{n\varpi}{m}$ peut représenter un angle quelconque, on aura finalement $1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$.

Corollaire 1.^{er} Si l'on prend les logarithmes naturels des deux membres de l'équation $1_\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, on aura $\alpha\sqrt{-1} = \text{Log.}(1_\alpha)$: ce qui fait voir qu'en géometrie de position les arcs de cercle sont les logarithmes des rayons correspondans. Ces arcs de cercle sont, comme on le voit, affectés du signe de position $\sqrt{-1}$, ce qui paraît très-naturel, puisque leur direction est dans un sens perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Observation. Le corollaire précédent contient le germe d'une théorie très-simple et très-lumineuse des logarithmes naturels, et de leurs rapports avec la circonférence du cercle. Il explique l'expression énigmatique » *les arcs de cercle imaginaires sont des logarithmes* « ; il donne enfin un sens raisonnable et intelligible à l'équation symbolique et mystérieuse $\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}=\text{Log.}(\sqrt{-1})$.

Corollaire 2. Puisque, d'après la notation 2.^{e}, on a $a_\alpha=a.1_\alpha$; il suit du théorème précédent qu'on a aussi $a_\alpha=a.e^{\alpha\sqrt{-1}}$.

Corollaire 3. Comme on a $e^{\alpha\sqrt{-1}}=\text{Cos.}\alpha+\text{Sin.}\alpha.\sqrt{-1}$, il s'ensuit que $a_\alpha=a\text{Cos.}\alpha+a\text{Sin.}\alpha\sqrt{-1}$ c'est-à-dire que, *pour exprimer une droite de grandeur et de position, il faut prendre la somme de ses projections sur deux axes de coordonnées rectangulaires* : bien entendu qu'on prendra chaque projection avec son signe de position.

Corollaire 4. Il suit de là qu'à une droite quelconque, donnée de grandeur et de position, on peut substituer tant d'autres droites qu'on voudra, pourvu que la somme de toutes les projections de ces dernières soit égale à la somme des projections de la droite donnée ; c'est-à-dire, qu'à une droite x_ξ on peut substituer les droites a_α, b_β, c_γ, ...m_μ, pourvu qu'on ait, entre ces quantités, la relation

$$x.e^{\xi\sqrt{-1}}=a.e^{\alpha\sqrt{-1}}+b.e^{\beta\sqrt{-1}}+c.e^{\gamma\sqrt{-1}}+\ldots\ldots+m.e^{\mu\sqrt{-1}}; \quad \text{(A)}$$

ou, à cause de l'indépendance du signe $\sqrt{-1}$,

$$\left.\begin{aligned} x\text{Cos.}\xi&=a\text{Cos.}\alpha+b\text{Cos.}\beta+c\text{Cos.}\gamma+\ldots\ldots+m\text{Cos.}\mu\,; \\ x\text{Sin.}\xi&=a\text{Sin.}\alpha+b\text{Sin.}\beta+c\text{Sin.}\gamma+\ldots\ldots+m\text{Sin.}\mu\,. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

On voit que toutes ces droites a_α, b_β, c_γ, ... peuvent être prises arbitrairement, à l'exception d'une seule, dont la grandeur et la position doivent être déterminées par l'équation (A) ou par ses équivalentes (B).

Réciproquement, on peut substituer à tant de droites, données de grandeur et de direction, qu'on voudra une droite unique, pourvu que les projections de cette dernière, sur deux axes rectangulaires, soient respectivement égales aux sommes de projections des premières sur les mêmes axes; et alors sa grandeur et sa position se trouveront déterminées par les équations (B).

Corollaire 5. Si les droites x_ξ, a_α, b_β, c_γ, ...m_μ du corollaire précédent forment un polygone fermé, les équations (B) sont évidemment satisfaites. Donc, on peut substituer à une droite quelconque donnée une suite d'autres droites, formant un polygone fermé avec la droite donnée; et réciproquement, à une suite de droites formant un polygone non fermé, on peut substituer la droite qui fermerait le polygone.

Application à la mécanique. Les trois derniers corollaires sont immédiatement applicables à la composition et à la décomposition des forces. En effet, une force, donnée d'intensité et de direction, peut toujours être représentée par une droite donnée de grandeur et de position, qui est le chemin parcouru, en vertu de cette force, dans l'unité de temps. En substituant donc, dans les trois derniers corollaires, les mots « *force donnée d'intensité et de direction* » à ceux-ci « *droite donnée de grandeur et de position* », on aura immédiatement les théorèmes connus sur la composition et sur la décomposition des forces. Cette théorie, qui était toujours sujette à quelque difficulté, se trouve donc réduite à une question de géométrie de position.

Remarque. Il est bon d'observer qu'au moyen du signe de position $\sqrt{-1}$, les abscisses et les ordonnées se trouvent aussi indépendantes, en géométrie de position, que le sont, en mécanique, les forces perpendiculaires entre elles. Cette conformité seule établirait un argument non équivoque en faveur de notre théorie, si d'ailleurs elle ne se justifiait pas d'elle-même.

Théorème 3. Le signe de position 1_α a aussi pour valeur $1^{\frac{\alpha}{2\varpi}}$; c'est-à-dire, que $1_\alpha = 1^{\frac{\alpha}{2\varpi}}$.

Démonstration.

Démonstration. Si l'on divise la circonférence décrite d'un rayon $=1$ en m parties égales, et qu'on mène des rayons aux points de division, ces rayons formeront, d'après la définition 3.^{e}, une progression de grandeur et de position, dont les deux termes extrêmes seront également l'unité. On aura donc $1_{\frac{2\varpi}{m}}=1^{\frac{1}{m}}$, $1_{\frac{4\varpi}{m}}=1^{\frac{2}{m}}$, ... $1_{\frac{2n\varpi}{m}}=1^{\frac{n}{m}}$. Supposant donc $\frac{2n\varpi}{m}=\alpha$, on aura $\frac{n}{m}=\frac{\alpha}{2\varpi}$, et par conséquent $1_{\alpha}=1^{\frac{\alpha}{2\varpi}}$.

Corollaire 1.^{er} Il suit de ce théorème, 1.° que les rayons qui partagent en m parties égales la circonférence dont le rayon est 1, représentent les m racines m.^{me} de l'unité ; 2.° que toutes ces racines sont égales entre elles et à l'unité, et qu'elles ne diffèrent les unes des autres que par leur position ; 3.° qu'enfin elles sont toutes également réelles, puisqu'elles sont représentées par des lignes données de grandeur et de position.

Corollaire 2. En comparant ce théorème avec le précédent, on obtient immédiatement les valeurs connues des racines de l'unité, qu'on peut exprimer, en général, par $1^{\frac{n}{m}}=e^{\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}}=\text{Cos.}\frac{2n\varpi}{m}+\text{Sin.}\frac{2n\varpi}{m}.\sqrt{-1}$.

Remarque 1.^{re} En combinant entre eux les théorèmes 2.^{e} et 3.^{e}, ainsi que leurs corollaires, on peut faire les rapprochemens les plus curieux et les plus intéressans entre les arcs de cercles, les logarithmes naturels et les racines de l'unité, et rattacher ces trois branches de calcul à une seule et unique théorie.

Remarque 2.^{e}. On voit, par cette théorie des signes de position, qu'à la rigueur on pourrait se passer, en géométrie, des signes $+$, $-$ et $\pm\sqrt{-1}$, comme signes de position ; et que nos signes 1_0, $1_{\pm\varpi}$, $1_{\pm\frac{\varpi}{2}}$ les remplacent, avec avantage, en conservant la liaison de ces signes avec le signe général de position $1_{\pm\alpha}$. Il en résulterait encore cet autre avantage que les signes $+$ et $-$ ne serviraient plus désormais qu'à indiquer l'addition et la soustraction ; de sorte que ces signes n'auraient jamais qu'une même signification ; ce qui éviterait bien des embarras, et serait en même temps beaucoup plus conforme aux règles d'une saine logique.

Théorème 4. Toutes les racines d'une équation d'un degré quelconque sont *réelles*, et peuvent être représentées par des droites données de grandeur et de position.

Démonstration. Il est démontré que toute équation d'un degré quelconque est toujours décomposable en facteurs réels, soit du premier soit du second degré ; et conséquemment il suffit de faire voir que les racines d'une équation du second degré peuvent être représentées par des droites données de grandeur et de position. Or, les racines d'une équation du second degré étant de la forme $x=p\pm\sqrt{q}$, sont immédiatement constructibles, par les corollaires 3.e et 4.e du théorème 2.e ; car 1.° si q est positif, x sera la somme ou la différence de deux quantités positives ou négatives, comptées sur l'axe des abscisses ; 2.° si q est négatif, x sera une droite partant de l'origine et dont les coordonnées de l'autre extrémité seront p et $\sqrt{q}$.

Telle est l'esquisse, très-abrégée, des nouveaux principes sur lesquels il me paraît convenable et même nécessaire de fonder la *géométrie de position*, et que je soumets au jugement des géomètres. Ces principes étant en opposition formelle avec les idées admises jusqu'ici, sur la nature des quantités dites *imaginaires*, je dois m'attendre à des objections nombreuses ; mais j'ose croire qu'un examen approfondi de ces mêmes principes, les fera trouver exacts, et que les conséquences que j'en ai déduites, quelque étranges qu'elles puissent paraître d'ailleurs, au premier abord, seront néanmoins jugées conformes aux règles de la dialectique la plus rigoureuse.

Je dois, au surplus, à la justice de déclarer que le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu mon frère, dans laquelle ce grand géomètre lui fait part (comme d'une chose qui lui a été communiquée, et comme objet de pure curiosité), du fond de mes définitions 2.^{e} et 3.^{e}, de mon thèorème 1.^{er}, et du corollaire 3.^{e} de mon théorème 2.^{e} ; mais ce dernier n'était avancé que gratuitement, et n'était justifié que par l'exactitude de quelques applications. Ce qui m'appartient en propre se réduit donc à la manière d'exposer et de démontrer ces principes, à la notation, et à l'idée de mon signe de position $1_{\pm\alpha}$.

Je désire que la publicité que je donne aux résultats auxquels je suis parvenu, puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaître, et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-même sur ce sujet. (*)

Metz, le 6 de juillet 1813.

(*) Il y a environ deux ans qu'écrivant à M. de Maizière, au sujet de son mémoire inséré à la page 368 du 1.^{er} volume de ce recueil, je lui mandais qu'on avait peut-être tort de vouloir comprendre toutes les grandeurs numériques dans une simple série ; et que, par leur nature, elles semblaient devoir former une table à double entrée qui, bornée aux seuls nombres entiers, pourrait être figurée comme il suit :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots, & -2+2\sqrt{-1}, & -1+2\sqrt{-1}, & +2\sqrt{-1}, & +1+2\sqrt{-1}, & +2+2\sqrt{-1}, & \ldots \\
\ldots, & -2+\sqrt{-1}, & -1+\sqrt{-1}, & +\sqrt{-1}, & +1+\sqrt{-1}, & +2+\sqrt{-1}, & \ldots \\
\ldots, & -2, & -1, & \pm 0, & +1, & +2, & \ldots \\
\ldots, & -2-\sqrt{-1}, & -1-\sqrt{-1}, & -\sqrt{-1}, & +1-\sqrt{-1}, & +2-\sqrt{-1}, & \ldots \\
\ldots, & -2-2\sqrt{-1}, & -1-2\sqrt{-1}, & -2\sqrt{-1}, & +1-2\sqrt{-1}, & +2-2\sqrt{-1}, & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

en sorte que déjà, comme M. Français, je supposais les nombres de la forme $n\sqrt{-1}$ situés dans une ligne perpendiculaire à celle qui renferme les nombres de la forme n ; et que, comme lui encore, je représentais les nombres étran-