ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ARGAND

Questions résolues. Solution du problème de situation proposé à la page 231 du 3.me volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 189-196
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__189_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de situation proposé à la page 231 du 3.me volume des Annales ;

Par M. Argand.

N. B. Le rédacteur des *Annales* a reçu de M. Argand un beau mémoire d'analise indéterminée, contenant la solution du difficile problème de la page 231 du 3.me volume de ce recueil. Ce mémoire étant trop étendu pour pouvoir paraître de suite, l'auteur, à la prière du rédacteur, a bien voulu en faire un extrait, présentant le procédé pratique, dégagé de tout raisonnement ; extrait très-propre à aider à l'intelligence du mémoire, lorsqu'il paraîtra ; c'est cet extrait que l'on va mettre sous les yeux du lecteur. On doit espérer que l'exemple de M. Argand encouragera quelques géomètres à aborder d'autres questions, proposées dans les *Annales*, et demeurées jusqu'ici sans solution.

PROBLÈME. Soit une circonférence divisée en un nombre quelconque N *de parties égales ; et soient affectés arbitrairement, et sans suivre aucun ordre déterminé, aux points de division, les numéros* 1, 2, 3,....N—1, N. *Soient joints ensuite, par des cordes, le point* 1 *au point* 2, *celui-ci au point* 3, *le point* 3 *au point* 4, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à joindre le point* N—1 *au point* N *et enfin ce dernier au point* 1. *On formera ainsi une sorte de polygône de* N *côtés, inscrit au cercle, et qui, en général, ne sera point régulier, puisque ses côtés pourront être inégaux, et que même quelques-uns d'entre eux pourront en couper un ou plusieurs des autres. Si l'on varie ensuite, de toutes les manières possibles, le numérotage des points de division, et qu'on répète, pour chaque numérotage, la même opération que ci-dessus, on formera un nombre déterminé de polygônes inscrits, parmi lesquels plusieurs ne différeront les uns des autres que par leur situation.*

On propose de déterminer, en général, quel sera le nombre des polygônes réellement différens ?

Solution. Soit N le nombre des côtés du polygône que, dans les exemples qui suivront, nous supposerons constamment $=6$.

1. Soit, en général, suivant la notation de M. Kramp, $m!=1,2,3,...m$: on aura ainsi

$$1!=1\ ,\ 2!=2\ ,\ 3!=6\ ,\ 4!=24\ ,\ 5!=120\ ,\ 6!=720.$$

On sait d'ailleurs que $0!=1$.

Employons le symbole $m\,?$ à désigner combien il y a de nombres premiers à m dans la suite $1,\ 2,\ 3,\ldots m$; on aura ainsi $1?=1\ ,\ 2?=1\ ,\ 3?=2\ ,\ 4?=2\ ,\ 5?=4\ ,\ 6?=2$. Il est connu que si $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$, $a,\ b,\ c,\ldots.$ étant des nombres premiers inégaux, on aura, en général, $m?=m\,\frac{a-1}{a}\,.\,\frac{b-1}{b}\,.\,\frac{c-1}{c}\ldots..$

$D_1\ ,\ D_2\ ,\ D_3\ ,\ldots.D_\eta$ sont les diviseurs de N, N compris ; de sorte que, s'ils sont disposés par ordre de grandeur, on a $D_1=1$, $D_\eta=N$. Représentant donc, en général, par d un de ces diviseurs, d sera susceptible de η valeurs.

Pour $N=6$, on a $D_1=1\ ,\ D_2=2\ ,\ D_3=3\ ,\ D_4=6$, et $\eta=4$; les valeurs de d, dans ce cas, seront donc $1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6$.

$d_1\ ,\ d_2\ ,\ d_3\ ,\ldots.d_\varepsilon$ sont les diviseurs de d, d non compris, de manière que leur nombre est ε, et que, s'ils sont disposés par ordre de grandeur, on a $d_1=1$.

Pour $d=1$,	on a	$\varepsilon=0$,
2 ,	$d_1=1$.	$\varepsilon=1$,
3 ,	$d_1=1$.	$\varepsilon=1$,
6 ,	$d_1=1\,,d_2=2\,,d_3=3$	$\varepsilon=3$.

2. P, Γ, Λ, ... P′, Γ′, Λ′, ... sont des signes de fonctions dont on va successivement expliquer la nature.

La définition de la fonction P, quel que soit d, est

$$\mathrm{P}d=\left(\frac{N}{d}\right)^d\left(\frac{N}{d}\right)?\,d!$$

Ainsi pour $N=6$,

$$PD_1 = P1 = 6^1 . 6 ? 1! = 6.2.\ 1 = 12,$$
$$PD_2 = P2 = 3^2 . 3 ? 2! = 9.2.\ 2 = 36,$$
$$PD_3 = P3 = 2^3 . 2 ? 3! = 8.1.\ 6 = 48,$$
$$PD_4 = P6 = 1^6 . 1 ? 6! = 1.1.720 = 720.$$

3. Γ est une fonction dont la définition est

$$\text{Pour } d \text{ impair } \Gamma d = N\left(\frac{2N}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{N}{d}\right)?\left(\frac{d-1}{2}\right)!$$

$$\text{Pour } d \text{ pair } \Gamma d = \frac{N}{2}\left(\frac{2N}{d}\right)^{\frac{d}{2}}\left(\frac{N}{d}\right)?\left(\frac{d}{2}\right)!$$

Ainsi, pour $N=6$,

$$\Gamma D_1 = \Gamma 1 = 6.12^0.6?0! = 6.1.2.1 = 12,$$
$$\Gamma D_2 = \Gamma 2 = 3.\ 6^1.3?1! = 3.6.2.1 = 36,$$
$$\Gamma D_3 = \Gamma 3 = 6.\ 4^1.2?1! = 6.4.1.1 = 24,$$
$$\Gamma D_4 = \Gamma 6 = 3.\ 2^3.1?3! = 3.8.1.6 = 144.$$

4. Λ est une fonction dont la définition est

Pour d impair . . . . $\Lambda d = \Gamma d$;

Pour d pair et $\begin{cases} \dfrac{N}{d} \text{ impair} \ldots\ldots \Lambda d = \dfrac{2\Gamma d}{N}, \\[2ex] \dfrac{N}{d} \text{ pair} \ldots\ldots \Lambda d = \dfrac{4\Gamma d}{N}. \end{cases}$

Ainsi, pour $N=6$,

$$\Lambda D_1 = \Lambda 1 = \Gamma 1 = 12,$$
$$\Lambda D_2 = \Lambda 2 = \frac{2\Gamma 2}{6} = \frac{2.36}{6} = 12,$$
$$\Lambda D_3 = \Lambda 3 = \Gamma 3 = 24,$$
$$\Lambda D_4 = \Lambda 6 = \frac{2\Gamma 6}{6} = \frac{2.144}{6} = 48.$$

5. P', Γ', Λ' sont des fonctions dont la définition générale est

$$F'd = Fd - (F'd_1 + F'd_2 + F'd_3 + \ldots + F'd_\varepsilon);$$

d'où l'on voit que, pour calculer ces sortes de fonctions, il faut aller continuellement des plus petits nombres aux plus grands, en observant que, 1 n'ayant pas de diviseurs plus petits que lui, on a simplement $F'D_1=F'1=F1$.

Comme, par le n.° précédent, on a, dans le cas de d impair, $\Lambda d=\Gamma d$, et comme d'ailleurs un nombre impair ne peut avoir que des diviseurs impairs, il s'ensuit qu'on peut, quand d est impair, écrire plus simplement $\Lambda' d=\Gamma' d$.

A l'aide de ces attentions on trouvera, pour $N=6$,

$$P'D_1=P'1=P1=12\ ,$$
$$P'D_2=P'2=P2-P'1=36-12=24\ ,$$
$$P'D_3=P'3=P3-P'1=48-12=36\ ,$$
$$P'D_4=P'6=P6-(P'1+P'2+P'3)=720-(12+24+36)=648.$$
$$\Gamma'D_1=\Gamma'1=\Gamma1=12\ ,$$
$$\Gamma'D_2=\Gamma'2=\Gamma2-\Gamma'1=36-12=24\ ;$$
$$\Gamma'D_3=\Gamma'3=\Gamma3-\Gamma'1=24-12=12\ ,$$
$$\Gamma'D_4=\Gamma'6=\Gamma6-(\Gamma'1+\Gamma'2+\Gamma'3)=144-(12-24-12)=96.$$
$$\Lambda'D_1=\Lambda'1=\Gamma'1=12\ ,$$
$$\Lambda'D_2=\Lambda'2=\Lambda2-\Lambda'1=12-12=0\ ,$$
$$\Lambda'D_3=\Lambda'3=\Gamma'3=12\ ,$$
$$\Lambda'D_4=\Lambda'6=\Lambda6-(\Lambda'1+\Lambda'2+\Lambda'3)=48-(12+0+12)=24.$$

6. Des fonctions Γ' et Λ' on tire les fonctions σ, σ', σ'' de la manière suivante :

$$\text{Pour } d \text{ pair}\ \left\{\begin{aligned} &\sigma' d=\frac{d}{2}\Gamma' d\ ,\\ &\sigma'' d=\frac{d}{2}\Lambda' d,\\ &\sigma\, d=\sigma' d+\sigma'' d\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\text{Pour } d \text{ impair}\quad \sigma\, d=d\Gamma' d\ ;$$

σ' et σ'' ne s'emploient pas dans ce second cas.

Ainsi, pour $N=6$,

$$\sigma D_1 = \sigma 1 = \Gamma' 1 = 12\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma' D_2 = \sigma' 2 = \Gamma' 2 = 24 \\ \sigma'' D_2 = \sigma'' 2 = \Lambda' 2 = 0 \end{array}\right\} \sigma D_2 = \sigma 2 = \sigma' 2 + \sigma'' 2 = 24\ ,$$

$$\sigma D_3 = \sigma 3 = 3\Gamma' 3 = 36\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma' D_4 = \sigma' 6 = 3\Gamma' 6 = 288 \\ \sigma'' D_4 = \sigma'' 6 = 3\Lambda' 6 = \ \ 72 \end{array}\right\} \sigma D_4 = \sigma 6 = \sigma' 6 + \sigma'' 6 = 360\ .$$

7. Les fonctions P' et σ conduiront aux fonctions ξ, en faisant $\xi = P' - \sigma$.

Ainsi, pour $N=6$,

$$\begin{array}{l} \xi D_1 = \xi 1 = P' 1 - \sigma 1 = \ 12 - \ 12 = \ \ 0\ , \\ \xi D_2 = \xi 2 = P' 2 - \sigma 2 = \ 24 - \ 24 = \ \ 0\ , \\ \xi D_3 = \xi 3 = P' 3 - \sigma 3 = \ 36 - \ 36 = \ \ 0\ , \\ \xi D_4 = \xi 6 = P' 6 - \sigma 6 = 648 - 360 = 288\ . \end{array}$$

8. Ce qui précède forme, quand N est impair, la première partie du procédé ; mais, quand N est pair, il faut, de plus, effectuer les déterminations suivantes

$$\frac{N}{2} = M\ .\ \text{puis pour}\ M \left\{\begin{array}{ll} \text{pair} & L = \dfrac{M}{2}\ , \\ \text{impair} & L = \dfrac{M-1}{2}\ ; \end{array}\right.$$

$$a = 2^M . M . M!\ , \quad Q = 2^M . M^2 L!\ ;$$

Ainsi, pour $N=6$,

$$M = \frac{6}{2} = 3\ , \quad L = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$a = 2^3 . 3 . 3! = 144\ ; \quad Q = 2^3 . 3^2 . 1! = 72\ ;$$

On fera ensuite

$$\text{Pour } M \text{ pair} \begin{cases} g=Q\,, \\ h=0\,, \\ g'=\sigma' N-Q\,, \\ h'=\sigma'' N\,. \end{cases} \qquad \text{Pour } M \text{ impair} \begin{cases} g=0\,, \\ h=Q\,, \\ g'=\sigma' N\,, \\ h'=\sigma'' N-Q\,. \end{cases}$$

M étant impair, dans notre exemple, on a

$$g=0\,,\quad h=72\,,\quad g'=\sigma' 6=288\,,\quad h'=\sigma'' 6-72=0\,.$$

On posera ensuite, quel que soit M,

$$\varkappa=a-Q\,,\quad \omega=\xi N-2\varkappa\,.$$

Ainsi, dans notre exemple,

$$\varkappa=144-72=72\,,\quad \omega=\xi 6-2.72=288-144=144\,.$$

9. Voici maintenant la seconde partie du procédé On y emploie les fonctions Σ, Σ', Σ'', Ξ qui, comme les précédentes ont pour *sujet* les différentes valeurs de d, avec cette restriction que Σ s'applique aux valeurs impaires seulement, Σ' et Σ'' aux valeurs paires, en exceptant la valeur $d=N$. Quant à Ξ, elle s'applique à toutes les valeurs de d, mais en exceptant encore $d=N$, si N est pair.

Les valeurs de ces diverses fonctions sont les suivantes :

$$\Sigma d=\frac{\sigma d}{2dN}\,,\quad \Sigma' d=\frac{\sigma' d}{2dN}\,,\quad \Sigma'' d=\frac{\sigma'' d}{2dN}\,,\quad \Xi d=\frac{\xi d}{4dN}\,.$$

Ainsi, dans notre exemple,

$$\Sigma D_1=\Sigma 1=\frac{\sigma 1}{12}=\frac{12}{12}=1\,,\quad \Sigma' D_2=\Sigma' 2=\frac{\sigma' 2}{2.2.6}=\frac{24}{24}=1\,;$$

$$\Sigma D_3=\Sigma 3=\frac{\sigma 3}{2.3.6}=\frac{36}{36}=1\,;\quad \Sigma'' D_2=\Sigma'' 2=\frac{\sigma'' 2}{2.2.6}=\frac{0}{24}=0\,.$$

$$\Xi D_1=\Xi 1=\frac{\xi 1}{4.1.6}=\frac{0}{24}=0\,,$$

$$\Xi D_2=\Xi 2=\frac{\xi 2}{4.2.6}=\frac{0}{48}=0\,,$$

$$\Xi D_3=\Xi 3=\frac{\xi 5}{4.3.6}=\frac{0}{72}=0\,.$$

10. Quant N est pair, on doit en outre faire

$$\text{Pour } M \text{ pair} \left\{ \begin{array}{l} G=\dfrac{g}{N^2}\,, \\ H=0\,; \end{array}\right. \qquad \text{Pour } M \text{ impair} \left\{ \begin{array}{l} G=0\,, \\ H=\dfrac{h}{N^2}\,. \end{array}\right.$$

Ainsi, dans notre exemple, où $M=3$, on a

$$G=0\,,\quad H=\tfrac{72}{36}=2\,.$$

On fera ensuite, quel que soit M;

$$G'=\frac{g'}{2N^2}\,,\quad H'=\frac{h'}{2N^2}\,,\quad A'=A''=\frac{\alpha}{2N^2}\,,\quad \Omega=\frac{\omega}{4N^2}\,;$$

ce qui donne, dans notre exemple,

$$G'=\tfrac{288}{72}=4\,,\quad H'=\tfrac{0}{72}=0\,,\quad A'=A''=\tfrac{72}{72}=1\,,\quad \Omega=\tfrac{144}{144}=1.$$

11. Enfin, en nommant Π le nombre des polygônes qui sont l'objet du problème, ce nombre, dans le cas de N impair, sera la somme de toutes les fonctions Σ, Σ', Σ'', Ξ; et, dans le cas de N pair, il sera cette somme, augmentée de celle des nombres G, H, G', H', A', A'', Ω.

Ainsi puisque, dans notre exemple, $N=6$, nombre pair, on aura

$$\begin{aligned}\Pi &= \Sigma 1+\Sigma 3+\Sigma' 2+\Sigma'' 2+\Xi 1+\Xi 2+\Xi 3+G+H+G'+H'+A'+A''+\Omega \\ &= 1+1+1+0+0+0+0+0+2+4+0+1+1+1\end{aligned}$$

ou

$$\Pi=12\,.$$

On aura donc douze polygônes essentiellement différens. Si l'on veut les construire, il suffira de construire douze cercles, de diviser chacun d'eux en six parties égales, de numéroter ensuite consécutivement les points de division ainsi qu'il suit

123456, 135264, 124635,
126453, 126543, 124653,
125634, 125364, 126354,
125436, 124365, 123645,

et joindre enfin les points de division par des cordes, suivant les conditions prescrites dans l'énoncé du problème.

12. En faisant successivement diverses suppositions pour N, et appliquant à chacune d'elles les méthodes qui viennent d'être développées, on trouve,

Pour $N=1$,	$\Pi=$ 0 ,
2 ,	1 ,
3 ,	1 ,
4 ,	2 ,
5 ,	4 ,
6 ,	12 ,
7 ,	39 ,
8 ,	202 ,
9 ,	1219 ,
10 ,	9468 ,
11 ,	83435 ,
12 ,	836017 ,
......	......