ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 221-236
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__221_0>

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Quatrième Mémoire*). (*)

115. LA position du plan de l'orbite d'un astre étant supposée connue, soit par des calculs antérieurs, soit par des observations faites près des nœuds, le problème de déterminer les autres élémens a été ramené dans le second mémoire (*Annales*, tom. IV, pag. 248) aux quatre équations qui suivent :

1.° $na=\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\chi\text{Sin.}\psi$,

2.° $n^2b=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi)$,

3.° $nc=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi$,

4.° $nd\sqrt{n}=\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi\text{Sin.}\psi$.

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.me volume et la page 1.re de celui-ci. L'auteur prie ses lecteurs de vouloir bien excuser la distraction qui lui a fait employer, aux pages 18, 19, 20, 21 du 3.me mémoire, pour désigner la demi-somme des anomalies excentriques, au lieu de la lettre χ qu'il avait destinée à cet usage, dans les mémoires précédens, la lettre φ qu'il a constamment consacrée à désigner l'anomalie vraie.

Les lettres a, b, c, d désignent ici des quantités qu'on peut immédiatement déduire des deux observations qui suffisent à la solution du problème, dont les inconnues sont représentées par les lettres μ, $\varkappa$, ψ, n. La première μ est l'angle qui détermine l'excentricité de l'orbite. Les angles χ et ψ sont, l'un la demi-somme et l'autre la demi-différence des anomalies excentriques de l'orbite, qui répondent aux époques des deux observations. Enfin n est une fraction ayant pour numérateur le demi-grand axe de l'orbite de la terre, et pour dénominateur celui de l'orbite de l'astre. Cette fraction n est *positive* dans le cas de l'*ellipse*, *négative* dans le cas de l'*hyperbole*, et *nulle* dans le cas de la *parabole*. Dans les deux derniers cas, nos quatre équations générales doivent subir quelques modifications dont nous parlerons plus loin.

116. La troisième de ces équations ne renferme que trois des quatre inconnues du problème, mais les trois autres les comprennent toutes les quatre. Il se présente toutefois un artifice assez simple, pour remplacer les quatre équations par deux autres qui, sans être plus conpliquées, ne renferment que deux des quatre inconnues, savoir : l'angle ψ et le facteur n. Nous poserons d'abord pour cela

$$a^2+c^2=f^2 \quad , \quad b^2+a^2c^2+c^4=b^2+c^2f^2=h^2 \; .$$

117. Ajoutant alors ensemble les quarrés des deux membres des première et troisième équations, on aura

$$n^2(a^2+c^2) \quad \text{ou} \quad n^2f^2=\text{Sin.}^2\psi(1-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\varkappa) \; ;$$

donc

$$\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\varkappa\text{Sin.}^2\psi=\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2 \; ;$$

mais, la quatrième équation donne, en transposant et quarrant,

$$\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\varkappa\text{Sin.}^2\psi=(nd\sqrt{n}-\psi)^2 \; ;$$

donc

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\varkappa+n^2f^2} \; .$$

118. Si ensuite nous multiplions l'équation

$$n^2f^2=\text{Sin.}^2\psi(1-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x)$$

par le quarré de la troisième

$$n^2c^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi\ ,$$

nous aurons

$$n^4c^2f^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(\text{Sin.}^2\psi-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x\text{Sin.}^2\psi)\ ;$$

mais, en élevant au quarré les deux membres de la seconde, on a

$$n^4b^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(\text{Cos.}^2\psi+2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x)\ ;$$

en les ajoutant donc, membre à membre, il viendra

$$n^4h^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)^2\ ,$$

d'où

$$n^2h=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)\ ;$$

mais la seconde, étant multipliée par Cos.ψ, devient

$$n^2b\text{Cos.}\psi=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}^2\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)\ ;$$

ce qui donne, par soustraction,

$$n^2(h-b\text{Cos.}\psi)=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}^3\psi=nc\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

c'est-à-dire,

$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

d'où

$$n=\frac{c\text{Sin.}^2\psi}{h-b\text{Cos.}\psi}\ .$$

Le problème se trouve donc ainsi réduit aux deux équations assez simples

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2}\ ;$$
$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi\ .$$

119. Cette dernière équation nous apprend à trouver l'une des deux inconnues n et ψ lorsqu'on connaît l'autre, ou lorsqu'on lui suppose une valeur quelconque. Supposons d'abord n connue, et posons, pour abréger,

$$4c^2-4nch+n^2b^2=R^2\ ;$$

nous en déduirons

$$\text{Cos.}\psi=\frac{nb-R}{2c},\qquad \text{Sin.}^2\psi=\frac{2nch-n^2b^2+nbR}{2c^2},$$

$$\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi=\frac{nb+R}{2c},\qquad \text{Cos.}^2\mu=\frac{2nch-n^2b^2-nbR}{2f^2}\ ;$$

On aura ensuite, en supposant le rayon de l'orbite terrestre égal à l'unité.

$$\textit{Distance périhélie}=\frac{1-\text{Sin.}\mu}{n}\ ;$$

$$\textit{Distance aphélie}=\frac{1+\text{Sin.}\mu}{n}\ .$$

120. Le cas de la parabole est celui de $n=0$, ce qui donne la distance périhélie égale à $\frac{c(h-b)}{2f^2}$. Dans celui de l'hyperbole, n devient négatif, ce qui donne à $\text{Cos.}\mu$ une valeur imaginaire ; $\text{Sin.}\mu$ est alors une quantité très-réelle, mais plus grande que l'unité ; la distance périhélie gardera donc la valeur positive que nous lui supposons dans l'ellipse ; mais la distance aphélie deviendra *négative*.

121. Si les observations sont assez rapprochées pour que l'angle ψ, demi-différence des anomalies excentriques, puisse être confondu avec son sinus, sans erreur sensible, la quatrième de nos équations (115) deviendra

$$nd\sqrt{n}=\text{Sin.}\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi)\ ;$$

ce qui donne, en substituant à $\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi$ la valeur équivalente (119) $\frac{nb+R}{2c}$, l'équation

$$2ncd\sqrt{n}=(2c+nb+R)\text{Sin.}\psi \;;$$

et ensuite, en quarrant et mettant (119) pour $\text{Sin.}^2\psi$ sa valeur,

$$8n^2c^4d^2=(2ch-nb^2+bR)(2c+nb+R)^2 \;.$$

Le quarré de $2c+nb+R$ devient, en développant

$$8c^2+4nc(b-h)+2n^2b^2+2(2c+nb)R \;;$$

multipliant cette expression par $2ch=nb^2+bR$, il viendra

$$2(8c^3-4nc^2h+4c^2R)(b+h) \;;$$

on aura donc l'équation

$$2(8c^3-4nc^2h+4c^2R)(b+h)=8n^2c^4d^2$$

ou

$$(2c-nh+R)(b+h)=n^2c^2d^2$$

d'où

$$R=\frac{n^2c^2d^2}{b+h}-2c+nh \;:$$

élevant au quarré de part et d'autre, il viendra

$$4c^2-4nch+n^2b^2=\frac{n^4c^4d^4}{(b+h)^2}-\frac{2(2c-nh)n^2c^2d^2}{b+h}+(2c-nh)^2$$

ou, en réduisant,

$$b^2=\frac{c^4d^4n^2}{(b+h)^2}-\frac{2c^2d^2(2c-nh)}{b+h}+h^2 \;,$$

d'où

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=-h+\sqrt{b^2+\frac{4c^3d^2}{b+h}} \;,$$

n est donc déterminée, et conséquemment le problême est résolu.

122. Si le second terme $\frac{4c^3d^2}{b+h}$ est assez petit pour que son quarré puisse être négligé devant le premier terme b^2, le radical deviendra

$b+\frac{2c^3d^2}{b(b+h)}$; on aura donc, pour trouver n, l'expression entièrement rationnelle

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=b-h+\frac{2c^3d^2}{b(b+h)}\ ;$$

d'où

$$n=\frac{2cd^2-bf^2}{bd^2}\ .$$

C'est la formule à laquelle nous avons été conduits, dans le mémoire précédent, en supposant $\text{Sin.}\psi=\psi$, et de plus $\text{Cos.}\psi=1$. La différence entre l'unité et $\text{Cos.}\psi$ n'a pas été négligée dans l'analise actuelle; aussi la formule

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=-h+\sqrt{b^2+\frac{4c^3d^2}{b+h}}$$

doit-elle être regardée comme plus exacte que l'autre. Ainsi donc la solution rigoureuse du problème où il s'agit de determiner le demi-grand axe de l'orbite d'un astre, moyennant deux observations assez rapprochées pour que la demi-différence des deux anomalies excentriques puisse être sensiblement confondue avec son sinus, conduit finalement à une équation très-simple du second degré.

123. Pour voir jusqu'où peut aller la différence entre les deux formules, revenons encore à la seconde comète de Méchain, découverte en 1781, qui nous a déjà fourni l'exemple du mémoire précédent. En faisant usage de l'ancienne formule, nous avons trouvé

$$n=-\tfrac{70871}{20750}=-3,41547\ ;$$

voyons ce que donnera la nouvelle. En faisant usage des observations des 14 et 19 de novembre, nous aurons

$$a=-0,0065710\ ,$$

$$b=+0,1066774\ ,$$

$$c = +0,1014968\ ,$$

$$d = +0,0441035\ ;$$

$$h = +0,1071757\ ;$$

$$b+h = +0,2138531\ .$$

On en tire

$$b^2 = 0,011380068\ ,$$

$$\frac{4c^3d^2}{b+h} = 0,000038040\ .$$

La petitesse de ce second nombre, par rapport au premier, nous fait prévoir que la différence entre les deux résultats sera peu sensible; effectivement, la nouvelle formule donne

$$n = -3,41626\ ;$$

la différence est au-dessous d'un *trois millième*; elle sera toujours d'autant moins sensible qu'on aura employé des observations moins éloignées entre elles.

124. Revenons aux deux équations (118) desquelles dépend la solution rigoureuse et générale du problème; savoir:

$$nd\sqrt{n} = \psi + \sqrt{\text{Sin.}^2\psi - n^2f^2}\ ;$$

$$n(h - b\text{Cos.}\psi) = c\text{Sin.}^2\psi\ .$$

Il ne coûtera rien d'éliminer l'inconnue n; il en résultera pour l'autre inconnue ψ une équation transcendante et de plus très-compliquée. Pour éliminer ψ, il faudra employer des moyens approximatifs. En faisant $\psi = \text{Sin.}\psi$, la première équation deviendra $2d\text{Sin.}\psi = (nd^2 + f^2)\sqrt{n}$; en combinant cette équation avec l'autre $n(h - b\text{Cos.}\psi) = c\text{Sin.}^2\psi$, on aura, en éliminant les sinus et cosinus de l'angle ψ, une équation en n très-composée du *quatrième* degré, laquelle toutefois pourra être réduite à une équation du second, et ce sera celle que nous avons déjà obtenue (122). En faisant

$$\psi = \frac{14 + \text{Cos.}\psi}{9 + 6\text{Cos.}\psi}\,\text{Sin.}\psi\ ;$$

on aura pour n une équation encore bien plus compliquée du sixième degré.

125. Il est beaucoup plus convenable de s'en tirer par le simple emploi de la règle de fausse position. On supposera à l'angle ψ une valeur quelconque, plus ou moins grande, d'après l'intervalle de temps qui sépare les deux observations. On aura

$$n = \frac{c\,\text{Sin.}^2\psi}{h - b\,\text{Cos.}\psi}\ ;$$

et substituant cette valeur de n dans l'autre

$$nd\sqrt{n} = \psi + \sqrt{\text{Sin.}^2\psi - n^2 f^2}\ ,$$

on aura, par un calcul très-facile, l'erreur que cette fausse position aura produite. Un second emploi de la règle donnera ordinairement l'inconnue n qu'on cherche, avec une précision suffisante.

126. Effectivement, le problème presente peu de difficultés dans le cas de l'ellipse ; mais ce n'est pas le cas ordinaire. En appliquant la méthode exposée dans le précédent mémoire à dix ou douze comètes dont les orbites ont été supposées paraboliques, et calculées dans cette supposition, j'ai presque toujours eu une valeur négative pour n, indice infaillible de l'hyperbole. Il convient donc d'apporter à nos formules les modifications que cette courbe exige.

127. Soient ainsi C le centre ; A le sommet ; F le foyer ; et soit B le point où l'asymptote est rencontrée par la tangente AB au sommet A, ce qui donnera AB=CF. Nous conserverons au demi-axe transverse CA de l'hyperbole la notation qu'il avait dans l'ellipse ; c'est-à-dire, que nous ferons $AC=b$. Et, comme l'autre des deux axes, de même que l'angle désigné jusqu'ici par μ deviennent imaginaires dans l'hyperbole, nous choisirons, parmi les angles réels, celui qui se rapproche le plus de cet angle μ, afin de conserver l'emploi

ploi de cette lettre, et d'établir une analogie convenable entre les formules elliptiques et hyperboliques. Ainsi, nous désignerons l'angle ABC par μ; ce qui donnera

$$AC=b\ ,$$

$$AB=b\,\text{Cot.}\mu\ ;$$

$$BC=CF=b\,\text{Cosec.}\mu\ .$$

L'ordonnée FN, qui répond au foyer de l'hyperbole, dont le double est ce qu'on nomme le paramètre de la courbe, et dont nous aurons besoin par la suite, deviendra donc $b\,\text{Cot.}^2\mu$. L'expression générale du rayon vecteur FM sera

$$FM=\frac{b\,\text{Cos.}\mu\,\text{Cot.}\varphi}{\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varphi}\ ,$$

en continuant de désigner par φ l'anomalie vraie, ou l'angle AFM.

128. En employant ces notations, on trouvera, pour la surface du secteur curviligne AFM, proportionnelle au temps, l'expression qui suit :

$$2AFM=\frac{b^2\text{Cot.}^2\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}-b^2\text{Cot.}\mu\,\text{Log.}\frac{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}\ .$$

Si, dans cette expression, on fait

$$x=\text{Log.}\frac{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}\ ,$$

elle deviendra

$$2AFM=AB\,.\,BC\,.\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}-AC\,.\,AB\,.\,x\ ;$$

et si, dans cette dernière, on fait $AC=a$, $BC=c$, et que de plus on remplace AB et x par ib et ix, i étant $\sqrt{-1}$, on retrouvera la formule elliptique connue

$$2AFM=abx-bc\,\text{Sin.}x\ ;$$

l'anomalie excentrique de l'ellipse sera donc remplacée ici par le logarithme naturel de la fraction

$$\frac{1+\text{Sin}.\mu\text{Cos}.\varphi+\text{Cos}.\mu\text{Sin}.\varphi}{\text{Cos}.\varphi+\text{Sin}.\mu}.$$

On sent, au surplus, que, dans l'hyperbole de même que dans la parabole, l'anomalie vraie φ, de même que l'excentrique $\varkappa$, est toujours comptée depuis le périhélie.

129. Il conviendra de choisir quelque signe représentatif des deux fractions $\frac{e^{\varkappa}+e^{-\varkappa}}{2}$ et $\frac{e^{\varkappa}-e^{-\varkappa}}{2}$, analogues à *Cos*.$\varkappa$ et *Sin*.$\varkappa$. Nous conserverons ces deux notations, mais en les écrivant, comme nous venons de le faire, en caractères *italiques*. Ainsi, au lieu de $\text{Cos}.^2\varkappa+\text{Sin}.^2\varkappa=1$, nous aurons dorénavant

$$\mathit{Cos}.^2\varkappa-\mathit{Sin}.^2\varkappa=1 .$$

Nous aurons de même

$$\mathit{Cos}.^2\varkappa+\mathit{Sin}.^2\varkappa=\mathit{Cos}.2\varkappa ,$$

$$2\mathit{Cos}.^2\varkappa=\mathit{Cos}.2\varkappa+1 ,$$

$$2\mathit{Sin}.^2\varkappa=\mathit{Cos}.2\varkappa-1 ,$$

$$2\mathit{Cos}.\varkappa\mathit{Sin}.\varkappa=\mathit{Sin}.2\varkappa .$$

Indépendamment des caractères italiques, les notations *Cos*.$\varkappa$ et *Sin*.$\varkappa$ seront toujours reconnaissables en ce que, dans toute cette analise des orbites hyperboliques, elles seront invariablement liées avec les angles $\varkappa$ et $\varkappa'$, de même qu'avec leur demi-somme et leur demi-différence, et jamais avec l'excentricité μ, ni avec les anomalies vraies φ et φ'.

130. Le développement en séries donne

$$\mathit{Cos}.\varkappa=1+\frac{\varkappa^2}{1.2}+\frac{\varkappa^4}{1.2.3.4}+\frac{\varkappa^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots..$$

$$\mathit{Sin}.\varkappa=\frac{\varkappa}{1}+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}+\frac{\varkappa^5}{1.2.3.4.5}+\frac{\varkappa^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots..$$

Ces deux séries connues sont décomposables en facteurs infinis. On voit que $\mathit{Cos}.\varkappa$ et $\dfrac{\mathit{Sin}.\varkappa}{\varkappa}$ sont toujours plus grands que l'unité, tandis que $\mathrm{Cos}.\varkappa$ et $\dfrac{\mathrm{Sin}.\varkappa}{\varkappa}$ étaient constamment moindres que l'unité. Heureusement, de nos trois sections coniques, l'hyperbole est la moins fréquente dans ses applications, sans quoi il faudrait construire des tables de $\mathit{Cos}.\varkappa$ et $\mathit{Sin}.\varkappa$, comme nous en avons pour $\mathrm{Cos}.\varkappa$ $\mathrm{Sin}.\varkappa$.

131. En introduisant deux angles quelconques $\varkappa$ et $\varkappa'$, indépendans entre eux, on aura les expressions qui suivent

$$\mathit{Sin}.(\varkappa'+\varkappa)=\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa+\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa\ ,$$

$$\mathit{Sin}.(\varkappa'-\varkappa)=\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa-\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa\ ,$$

$$\mathit{Cos}.(\varkappa'+\varkappa)=\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa+\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa\ ,$$

$$\mathit{Cos}.(\varkappa'-\varkappa)=\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa-\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa\ ;$$

d'où il résulte

$$2\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa=\mathit{Sin}.(\varkappa'+\varkappa)+\mathit{Sin}.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa=\mathit{Sin}.(\varkappa'+\varkappa)-\mathit{Sin}.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2\mathit{Cos}.\varkappa'\mathit{Cos}.\varkappa=\mathit{Cos}.(\varkappa'+\varkappa)+\mathit{Cos}.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2\mathit{Sin}.\varkappa'\mathit{Sin}.\varkappa=\mathit{Cos}.(\varkappa'+\varkappa)-\mathrm{Cos}.(\varkappa'-\varkappa)\ .$$

132. De l'anomalie excentrique $\varkappa$, on repassera facilement à l'anomalie vraie que lui répond; on aura

$$\mathrm{Sin}.\varphi=\frac{\mathrm{Cos}.\mu\,\mathit{Sin}.\varkappa}{\mathit{Cos}.\varkappa-\mathrm{Sin}.\mu}\ ,\qquad \mathrm{Cos}.\varphi=\frac{1-\mathrm{Sin}.\mu\,\mathit{Cos}.\varkappa}{\mathit{Cos}.\varkappa-\mathrm{Sin}\,\mu}\ .$$

On aura de même le rayon vecteur FM par la formule

$$\frac{r}{b}=\frac{\mathit{Cos}.\varkappa-\mathrm{Sin}.\mu}{\mathrm{Sin}.\mu}=\frac{\mathit{Cos}.\varkappa}{\mathrm{Sin}.\mu}-1\ ;$$

enfin, la surface du secteur AFM se trouvera, par la formule très-simple

$$2\mathrm{AFM}-b^2\mathrm{Cos}.\mu(\mathrm{Cosec}.\mu\,Sin.\varkappa-\varkappa) .$$

133. Les deux expressions littérales de P, Q, de même que de P', Q', subiront les modifications suivantes : on aura

$$P=\frac{r}{b}\,\mathrm{Cos}.(\iota+\varphi)=\frac{Cos.\varkappa-\mathrm{Sin}.\mu}{\mathrm{Sin}.\mu}\,\mathrm{Cos}.(\iota+\varphi) ,$$

$$Q=\frac{r}{b}\,\mathrm{Sin}.(\iota+\varphi)=\frac{Cos.\varkappa-\mathrm{Sin}.\mu}{\mathrm{Sin}.\mu}\,\mathrm{Sin}.(\iota+\varphi) ;$$

ce qui se réduit à

$$P=\mathrm{Cosec}.\mu\mathrm{Cos}.\iota-Cos.\varkappa\,\mathrm{Cos}.\iota-\mathrm{Cos}.\mu Sin.\varkappa\mathrm{Sin}.\iota ,$$

$$Q=\mathrm{Cosec}.\mu\mathrm{Sin}.\iota-Cos.\varkappa\,\mathrm{Cos}.\iota+\mathrm{Cos}.\mu Sin.\varkappa\mathrm{Cos}.\iota ,$$

$$P'=\mathrm{Cosec}.\mu\mathrm{Cos}.\iota-Cos.\varkappa'\mathrm{Cos}.\iota-\mathrm{Cos}.\mu Sin.\varkappa'\mathrm{Sin}.\iota ,$$

$$Q'=\mathrm{Cosec}.\mu\mathrm{Sin}.\iota-Cos.\varkappa'\mathrm{Cos}.\iota+\mathrm{Cos}.\mu Sin.\varkappa'\mathrm{Cos}.\iota ,$$

$$R=\mathrm{Cosec}.\mu.\,Cos.\varkappa-1 ,$$

$$R'=\mathrm{Cosec}.\mu.\,Cos.\varkappa'-1 ;$$

134. Les expressions $R-R'$, $PQ'-P'Q$, $RR'-PP'-QQ'$ subissent de même quelques modifications, exposées dans le tableau qui suit :

$$R-R'=\mathrm{Cosec}.\mu(Cos.\varkappa-Cos.\varkappa') .$$

$$(PQ'-P'Q)\mathrm{Sin}.^2\mu=\mathrm{Cos}.\mu(Sin.\varkappa'-Sin.\varkappa)-\mathrm{Sin}.\mu\mathrm{Cos}.\mu Sin.(\varkappa'-\varkappa) ;$$

$$RR'-PP'-QQ'=\mathrm{Cos}.^2\mu Cos.(\varkappa'-\varkappa)-\mathrm{Cos}.^2\mu .$$

A l'exemple de l'ellipse, nous désignerons par χ et ψ la demi-somme et la demi-différence des deux anomalies excentriques fictives $\varkappa'$ et $\varkappa$. On aura ainsi

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa'+\varkappa=2\chi ,\\ \varkappa'-\varkappa=2\psi ;\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l}\varkappa'=\chi+\psi ,\\ \varkappa=\chi-\psi .\end{array}\right.$$

Comme les angles χ et ψ se rapportent aux anomalies excentriques

$\varkappa$ et $\varkappa'$, les notations $Sin.x$, $Cos.\ x$, $Sin.\psi$, $Cos.\psi$ continueront d'être prises dans le sens du n.° 129. On aura

$$R'-R=2\text{Cosec.}\mu Sin.x Sin.\psi\ ,$$

$$(PQ'-P'Q)\text{Sin.}^2\mu=2\text{Cos.}\mu Sin.\psi(Cos.x-\text{Sin.}\mu Cos.\psi)\ ,$$

$$RR'-PP'-QQ'=2\text{Cos.}^2\mu Sin.^2\psi\ .$$

En comparant ces équations à celles de l'analise précédente (*Annales*, tome IV, pag. 247, et tom. V, pag. 18) on voit qu'en divisant généralement par $\text{Sin.}^2\mu$ les expressions elliptiques, on parvient à celles de l'hyperbole.

135. A ces trois équations, il convient d'ajouter la quatrième, qui tient à la surface du secteur hyperbolique, proportionnelle au temps. On a eu (132)

$$2\text{AFM}=b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Sin\varkappa-\varkappa)\ ;$$

on aura de même, pour une seconde observation

$$2\text{AFM}'=b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Sin.\varkappa'-\varkappa')\ .$$

Otant la première de la seconde, il résultera

$$2\text{MFM}'=2b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Cos.x Sin.\psi-\psi)\ .$$

La surface de ce secteur est proportionnelle au temps qui sépare les deux observations, c'est-à-dire, à l'angle $\theta'-\theta$; reste donc à déterminer le facteur par lequel il faut multiplier l'une de ces deux quantités, pour que le produit soit rigoureusement égal à l'autre.

136. Concevons généralement deux astres, tournant autour du même centre de forces dans deux sections coniques, dont les paramètres soient $2p$, $2p'$; les lettres p, p' désigneront ainsi les ordonnées des deux sections, à leurs foyers respectifs. Supposons de plus que l'un de ces deux astres décrive le secteur A dans le temps T, et l'autre le secteur A' dans le temps T'. On sait qu'alors les deux fractions $\frac{A}{T\sqrt{p}}$ et $\frac{A'}{T'\sqrt{p'}}$ seront égales entre elles.

Ainsi, dans le cas $T=T'$, les aires A, A' étant supposées décrites dans des temps égaux, on aura la proportion, très-générale, $A:A'=\sqrt{p}:\sqrt{p'}$; c'est-à-dire, les aires des secteurs sont entre elles comme les racines quarrées des paramètres des deux orbites.

137. Appliquons cette proportion à l'analise qui nous occupe. L'un des deux astres est la terre, décrivant, sur un cercle du rayon a, l'angle au centre $\theta'-\theta$. Le demi-paramètre est ici a; et la surface du secteur est $\frac{1}{2}a^2(\theta'-\theta)$. L'autre est une hyperbole dont le demi-axe transverse est b, la distance du foyer au centre $b\text{Cosec.}\mu$, et le demi-paramètre $b\text{Cos.}^2\mu$. Cette comète aura donc décrit, dans le temps même qui sépare les deux observations, l'aire MFM', dont nous venons de donner l'expression littérale. Cela donne la proportion

$$\tfrac{1}{2}a^2(\theta'-\theta):\text{MFM}'=\sqrt{a}:\sqrt{b}\,.\,\text{Cos.}\mu\ ,$$

d'où résulte l'égalité

$$a\sqrt{ab}(\theta'-\theta)\text{Cos.}\mu=2\text{MFM}'\ ;$$

ou bien

$$(\theta'-\theta)a\sqrt{a}=(\text{Cosec.}\mu\,Cos.\chi Sin.\psi-\psi)2b\sqrt{b}\ .$$

138. De même que, dans les problèmes précédens, nous devons nous rappeler que la fraction $\frac{b}{a}$, qui multiplie P, P', Q, Q', dans les formules du n.° 55 (*Annales*, tom. IV, pag. 245), est elle-même une de nos inconnues. En faisant, comme ci-dessus, $\frac{a}{b}=n$, et en conservant les notations

$$P=nM\ ,\quad Q=nN\ ,\quad R=nO\ ;$$
$$P'=nM'\ ,\quad Q'=nN'\ ,\quad R'=nO'\ ;$$

les quantités M, N, O, M', N', O', seront celles qu'on aura déduites immédiatement des formules du n.° 55, lesquelles, au signe près, sont identiquement les mêmes dans l'ellipse et dans l'hyperbole. Ces quantités pourront être regardées comme connues; tandis qu'il faudra regarder comme inconnues la fraction $\frac{a}{b}=n$, aussi bien que $\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}=n\sqrt{n}$.

139. Nos quatre équations deviendront ainsi

$$n(O'-O)=2\text{Cosec.}\mu\,Sin.\chi\,Sin.\psi\ ;$$

$$n^2(MN'-M'N)\text{Sin.}^2\mu=2\text{Cos.}\mu\,Sin.\psi(Cos.\chi-\text{Sin.}\mu\,Cos.\psi)\ ,$$

$$n^2(OO'-MM'-NN')=2\text{Cos.}^2\mu\,Sin.^2\psi\ ,$$

$$n\sqrt{n}(\theta'-\theta)=2\text{Cosec.}\mu\,Cos.\chi\,Sin.\psi-2\psi\ .$$

140. En conséquence, en revenant aux notations déjà employées dans les mémoires précédens (*Annales*, tom. V, pag. 18), savoir:

$$2a=O'-O\ ,$$

$$2b=MN'-M'N\ ,$$

$$2c^2=OO'-MM'-NN'\ ,$$

$$2d=\theta'-\theta\ ;$$

le problème sera facilement réduit aux quatre équations qui suivent:

$$n\,a=\text{Cosec.}\mu\,Sin.\chi\,Sin.\psi\ ,$$

$$n^2b=\text{Cosec.}^2\mu\,\text{Cos.}\mu\,Sin.\psi(Cos.\chi-\text{Sin.}\mu\,Cos.\psi)\ ;$$

$$n\,c=\text{Cot.}\mu\,Sin.\psi\ ,$$

$$nd\sqrt{n}=\text{Cosec.}\mu\,Cos.\chi\,Sin.\psi-\psi\ :$$

141. En suivant une marche analogue à celle qui a été enseignée au commencement de ce *quatrième* mémoire, et en se rappelant, pour les réductions, que $Cos.^2\psi-Sin.^2\psi=1$, on parviendra de même à réduire ces quatre équations à deux, ne renfermant plus que les deux inconnues n et ψ, savoir :

$$nd\sqrt{n}=\sqrt{Sin.^2\psi+n^2f^2}-\psi\ ;$$

$$n=\frac{cSin.^2\psi}{h-bCos.\psi}\ .$$

142. Cette dernière est identiquement la même que dans l'ellipse