GERGONNE

Géométrie analitique. Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 29-32
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__29_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde ;

Par M. Gergonne.

Soient a, b, c les trois demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde, pris pour axe des coordonnées. Soient ensuite (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') les extrémités de trois autres demi-diamètres quelconques ; on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1\,,\\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}&=1\,,\\ \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}&=1\,;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Si l'on veut, en outre, que les nouveaux demi-diamètres soient conjugués les uns aux autres, il faudra exprimer de plus que le plan tangent à l'extrémité de chacun est, à la fois, parallèle à chacun des deux autres ; ce qui donnera encore

$$\left.\begin{aligned}\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}&=0\,,\\ \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}+\frac{z''z}{c^2}&=0\,;\\ \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}&=0\,;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

En posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{x}{a}=X\,, & \dfrac{y}{b}=Y\,, & \dfrac{z}{c}=Z\,,\\[2ex] \dfrac{x'}{a}=X'\,, & \dfrac{y'}{b}=Y'\,, & \dfrac{z'}{c}=Z'\,,\\[2ex] \dfrac{x''}{a}=X''\,, & \dfrac{y''}{b}=Y''\,, & \dfrac{z''}{c}=Z''\,,\end{array}\right\}\quad(3)$$

ces équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l}X^2+Y^2+Z^2=1\,,\\ X'^2+Y'^2+Z'^2=1\,,\\ X''^2+Y''^2+Z''^2=1\,;\end{array}\right\}(4)\qquad \left.\begin{array}{l}X'X''+Y'Y''+Z'Z''=0\,,\\ X''X+Y''Y+Z''Z=0\,,\\ XX'+YY'+ZZ'=0\,.\end{array}\right\}(5)$$

Or, il est connu, par la théorie de la transformation des coordonnées dans l'espace (*), que, lorsqu'on a de telles relations entre des quantités, on a aussi entre elles les relations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}X^2+X'^2+X''^2=1\,,\\ Y^2+Y'^2+Y''^2=1\,,\\ Z^2+Z'^2+Z''^2=1\,;\end{array}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{array}{l}(YZ'-ZY')^2+(Y'Z''-Z'Y'')^2+(Y''Z-Z''Y)^2=1\,,\\ (ZX'-XZ')^2+(Z'X''-X'Z'')^2+(Z''X-X''Z)^2=1\,,\\ (XY'-YX')^2+(Y'X''-X'Y'')^2+(X''Y-Y''X)^2=1\,;\end{array}\right\}(7)$$

$$XY'Z''-XZ'Y''+ZX'Y''-YX'Z''+YZ'X''-ZY'X''=1.\quad(8)$$

En remettant, dans ces relations, les valeurs des symboles qu'elles

---

(*) Voyez entre autres le tome 1.er du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; page 450 de la 1.re édition, et page 528 de la 2.e renferment, données par les équations (3), et chassant les dénominateurs, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x'^2+x''^2=a^2\ , \\ y^2+y'^2+y''^2=b^2\ , \\ z^2+z'^2+z''^2=c^2\ ; \end{array}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{array}{l} (yz'-zy')^2+(y'z''-z'y'')^2+(y''z-z''y)^2=b^2c^2\ , \\ (zx'-xz')^2+(z'x''-x'z'')^2+(z''x-x''z)^2=c^2a^2\ , \\ (xy'-yx')^2+(x'y''-y'x'')^2+(x''y-y''x)^2=a^2b^2\ ; \end{array}\right\}(10)$$

$$xy'z''-xz'y''+zx'y''-yx'z''+yz'x''-zy'x''=abc\ . \qquad (11)$$

Si maintenant on désigne par a', b', c' les trois demi-diamètres conjugués dont il s'agit, et par α, β, γ les angles qu'ils forment deux à deux respectivement; il est aisé de voir qu'on aura

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a'^2\ , \\ x'^2+y'^2+z'^2=b'^2\ , \\ x''^2+y''^2+z''^2=c'^2\ ; \end{array}\right\}(12)$$

$$\left.\begin{array}{l} (y\,z'-z\,y')^2+(z\,x'-x\,z')^2+(x\,y'-y\,x')^2=a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma, \\ (y'\,z''-z'\,y'')^2+(z'\,x''-x'\,z'')^2+(x'\,y''-y'\,x'')^2=b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha, \\ (y''z\ -z''y\ )^2+(z''x\ -x''z\ )^2+(x''y\ -y''x\ )^2=c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta\ ; \end{array}\right\}(13)$$

$$\begin{array}{c} xy'z''-xz'y''+zx'y''-yx'z''+yz'x''-zy'x'' \\ =abc\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}\ . \end{array} \qquad (14)$$

Comparant alors la somme des équations (12) à la somme des équations (9), puis la somme des équations (13) à celle des équations (10) et enfin l'équation (14) à l'équation (11), il viendra

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ ,$$

$$b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha+c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta+a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ ,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=a^2b^2c^2.$$

Ces relations sont connues (*) ; mais je ne sache pas qu'on y soit parvenu jusqu'ici d'une manière si simple et si directe.

Le même procédé, qui peut être facilement appliqué à toutes les surfaces du second ordre qui ont un centre, s'applique avec la plus grande facilité aux courbes planes du même ordre.

(*) Voyez la page 113 du 3.e volume de ce recueil.