J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 32 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 301-309
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__301_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 32 de ce volume;

Par M. J. B. Durrande.

Lemme. Dans un quadrilatère, qui a deux angles droits opposés l'un à l'autre, un angle oblique et les deux côtés adjacens étant donnés, déterminer les deux autres côtés, ainsi que la diagonale qui joint les sommets des deux angles obliques?

Solution. Soient θ l'angle oblique donné, g, h les deux côtés qui le comprennent, y et x les côtés respectivement opposés, et z la diagonale qui joint les sommets des angles obliques.

g est la somme des projections de h et y sur sa direction; et h est pareillement la somme des projections de g et x sur sa direction; d'où il résulte qu'on doit avoir

$$g=h\mathrm{Cos}.\theta+y\mathrm{Sin}.\theta\;,\quad h=g\mathrm{Cos}.\theta+x\mathrm{Sin}.\theta\;;$$

c'est-à-dire,

$$y=\frac{g-h\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\;,\quad x=\frac{h-g\mathrm{Cos}.\theta}{\mathrm{Sin}.\theta}\;;$$

mais on a de plus

$$z=\sqrt{g^2+x^2}=\sqrt{h^2+y^2}\;;$$

donc, en substituant,

$$z=\frac{\sqrt{g^2-2gh\mathrm{Cos}.\theta+h^2}}{\mathrm{Sin}.\theta}\;.$$

PROBLÈME I. Trois cercles, tracés sur un même plan, étant tels que chacun d'eux touche les deux autres; trouver, en fonction de leurs rayons, 1.° le rayon du cercle qui passe par leurs points de contact deux à deux; 2.° le rayon du cercle qui passe par leurs centres?

Solution. Soient A, B, C les centres et a, b, c les rayons respectifs des trois cercles dont il s'agit. Le triangle ABC pourra être quelconque, puisqu'il se trouve dépendre de trois élémens arbitraires et indépendans.

Le cercle inscrit à ce triangle a, par la propriété des tangentes partant d'un même point, ses points de contact avec les côtés tellement situés que chaque sommet est également distant des points de contact avec les côtés qui concourent à ce sommet; d'où il suit que ces points sont aussi les points de contact des cercles deux à deux. Ainsi, le cercle qui passe par les points de contact des cercles donnés deux à deux n'est autre chose que le cercle inscrit au triangle ABC. Quant au cercle qui contient leurs centres, c'est évidemment le cercle circonscrit au même triangle.

La question proposée se trouve donc ramenée à déterminer, en fonction de a, b, c, les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; soient D, E leurs centres respectifs, d, e leurs rayons.

Par les formules connues, on a

$$Cos.\mathrm{C}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}}\ ;$$

mais, on a d'ailleurs

$$\overline{\mathrm{AB}}=a+b\ ,\quad \overline{\mathrm{BC}}=b+c\ ,\quad \overline{\mathrm{CA}}=c+a\ ;$$

donc, en substituant

$$Cos.\mathrm{C}=\frac{c^2+(a+b)c-ab}{c^2+(a+b)c+ab}\ ;$$

et de là

$$Sin.C=\frac{2\sqrt{abc(a+b+c)}}{(c+a)(c+b)}.$$

En remarquant que l'aire t du triangle est la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris, on aura

$$t=\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Les perpendiculaires abaissées du centre D sur les côtés $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, et dont la longueur commune est d, formeront avec ces côtés un quadrilatère bi-rectangle dont les deux autres côtés ont aussi une longueur commune c et comprennent entre eux l'angle C, connu par ce qui précède; on aura donc (*Lemme*)

$$d=\frac{c(1-Cos.C)}{Sin.C};$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$d=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}};$$

tel est donc le rayon du cercle qui contient les points de contact.

Si l'on voulait avoir la distance DC, on trouverait d'abord

$$DC=\frac{c\sqrt{2(1-Cos.C)}}{Sin.C};$$

puis, en substituant

$$DC=\sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}}.$$

Les perpendiculaires abaissées du centre E sur les côtés $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$, forment avec ces côtés un autre quadrilatère bi-rectangle, dont un angle oblique est encore C et dont les deux côtés adjacens sont $\frac{1}{2}(c+a)$ et $\frac{1}{2}(c+b)$. La diagonale qui joint les deux angles obliques étant e, on aura (*Lemme*)

$$e=\frac{\sqrt{(c+a)^2-2(c+a)(c+b)Cos.C+(c+b)^2}}{2Sin.C}\,;$$

ou, en substituant,

$$e=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}\,.$$

et tel est le rayon du cercle qui contient les centres.

Si l'on représente de plus par α la perpendiculaire abaissée du même point sur le côté $\overline{BC}$, on aura

$$\alpha=\frac{(a+c)-(b+c)Cos.C}{2Sin.C}\,;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\alpha=(b+c)\,.\,\frac{a^2+(b+c)a-bc}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}\,.$$

PROBLÈME II. Quatre sphères étant tellement situées dans l'espace que chacune d'elles touche les trois autres; *on propose de démontrer que leurs six points de contact, deux à deux, sont sur une même sphère? On demande, en outre, de déterminer, en fonction des rayons de ces quatre sphères*, 1.° *le rayon de la sphère qui contient leurs points de contact deux à deux*; 2.° *le rayon de la sphère qui passe par leurs centres?*

Solution. Soient A, B, C, D les centres et a, b, c, d, les rayons respectifs des quatre sphères données. Le tétraèdre ABCD ne pourra être quelconque, puisqu'il se trouve uniquement dépendre de quatre élémens arbitraires et indépendans, lesquels sont les rayons des quatre sphères données. On voit, en effet, que, l'une quelconque de ses arêtes étant nécessairement la somme des rayons de deux de ces sphères, l'arête opposée doit être la somme des rayons des deux autres; de sorte qu'il y a entre les six arêtes de ce tétraèdre ces trois relations, que la somme de deux arêtes opposées quelconques est constante et égale à la somme des rayons des quatre sphères données.

Concevons qu'on ait inscrit des cercles aux quatre faces de ce tétraèdre ; les points de contact de ces cercles avec les arêtes qui terminent respectivement les faces auxquelles ils sont inscrits seront évidemment (*Problème I*) les points de contact des quatre sphères deux à deux ; d'où il résulte que les deux cercles tangens à une même arête la toucheront au même point ; ou, ce qui revient au même, que les quatre cercles se toucheront deux à deux en six points, où ils auront les arêtes pour tangentes communes.

Par les points de contact qui appartiennent aux trois arêtes d'un même angle trièdre quelconque, concevons trois plans respectivement perpendiculaires à ces arêtes ; ces plans passant, deux à deux, par les centres des trois cercles inscrits correspondans se couperont suivant les axes de ces cercles, qui conséquemment concourront en un même point ; et il est aisé d'en conclure que les axes des quatre cercles concourent en ce point.

Le point de concours des quatre axes est évidemment également distant de tous les points de la circonférence de chaque cercle, en particulier ; puis donc que ces cercles ont, deux à deux, un point qui leur est commun, il faut en conclure que le point de concours des quatre axes est également distant de tous les points de toutes les circonférences, et conséquemment des six points de contact de nos cercles deux à deux, lesquels se trouvent tous conséquemment sur une même sphère, dont nos quatre cercles sont les intersections avec les faces du tétraèdre, et à laquelle toutes ses arêtes sont tangentes. Quant à la sphère qui contient les centres des quatre sphères données, c'est évidemment la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

La question proposée se trouve donc ramenée à déterminer, en fonction de a, b, c, d, le rayon de la sphère qui touche à la fois les six arêtes du tétraèdre ABCD, et le rayon de la sphère circonscrite au même tétraèdre : problème qu'au surplus on ne saurait se proposer pour un tétraèdre quelconque. Soient E, F les centres de ces sphères et e, f leurs rayons respectifs.

En désignant simplement les angles dièdres par leurs arêtes; l'angle trièdre D donnera, par les formules connues,

$$Cos.\overline{DC}=\frac{Cos.ADB-Cos.CDA\,Cos.CDB}{Sin.CDA\,Sin.CDB}.$$

Mais on a (*Probl. I*)

$$Cos.CDA=\frac{d^2+(a+c)d-ac}{(a+d)(c+d)},\qquad Sin.CDA=\frac{2\sqrt{acd(a+c+d)}}{(a+d)(c+d)};$$

$$Cos.CDB=\frac{d^2+(b+c)d-bc}{(b+d)(c+d)},\qquad Sin.CDB=\frac{2\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(b+d)(c+d)};$$

$$Cos.ADB=\frac{d^2+(a+b)d-ab}{(a+d)(b+d)},$$

donc

$$Cos.\overline{DC}=\frac{(c+d)^2\{d^2+(a+b(d-ab\}-\{d^2+(a+c)d-ac\}\{d^2+(b+c)d-bc\}}{4cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}};$$

ou, en développant et réduisant,

$$Cos.\overline{DC}=\frac{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)}{2cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}};$$

de là

$$Sin.\overline{DC}=\frac{(c+d)\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}{2cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}}.$$

Si l'on se rappelle que le volume T d'un tétraèdre est les deux tiers du produit des aires de deux de ses faces multiplié par le sinus de leur inclinaison et divisé par l'arête qu'elles déterminent; et si l'on fait attention (*Prob. I*) que

$$CAD=\sqrt{acd(a+c+d)},\quad CBD=\sqrt{bcd(b+c+d)},$$

on trouvera facilement

$$T=\tfrac{1}{3}\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}\ ;$$

fonction symétrique de a, b, c, d, comme on pouvait bien s'y attendre.

Si du point E on abaisse des perpendiculaires sur les plans des faces CAD, CBD, et qu'on joigne leurs pieds au point de contact de DC avec la sphère dont E est le centre ; on formera un quadrilatère bi-rectangle, dans lequel deux côtés seront les rayons des cercles inscrits à ces mêmes faces : rayons que nous représenterons respectivement par α et β. L'angle compris sera égal à l'angle dièdre $\overline{\mathrm{DC}}$, et la diagonale qui joindra son sommet au sommet opposé sera le rayon e de la sphère qui contient les points de contact ; on aura donc (*Lemme*)

$$e=\frac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta\,Cos.\overline{\mathrm{DC}}+\beta^2}}{Sin.\overline{\mathrm{DC}}}\ .$$

Mais, nous avons les valeurs de sinus et cosinus $\overline{\mathrm{DC}}$, et l'on a de plus (*Prob. 1*)

$$\alpha=\sqrt{\frac{bcd}{b+c+d}}\,,\qquad \beta=\sqrt{\frac{acd}{a+c+d}}\ ;$$

il viendra donc, en substituant

$$e=\frac{2abcd}{\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}\ ;$$

ou encore

$$e=\frac{2}{3}\cdot\frac{abcd}{T}\ ;$$

c'est-à-dire, que le rayon de la sphère qui contient les six points de contact de quatre sphères dont chacune touche les trois autres, est les deux tiers du quotient de la division du produit des rayons des quatre sphères par le volume du tétraèdre qui a ses sommets à leurs centres.

Du centre F soient abaissées des perpendiculaires sur les plans des deux faces CAD, CBD ; ces perpendiculaires et les droites qui joindront leurs pieds au milieu de l'arête $\overline{CD}$ formeront un quadrilatère bi-rectangle, dans lequel un angle sera encore égal à l'angle dièdre $\overline{CD}$; ses deux côtés comprenant cet angle seront les distances de l'arête $\overline{CD}$ aux centres des cercles circonscrits aux mêmes faces : distances que nous désignerons respectivement par β' et α' ; ainsi, en désignant par k la distance du point F à l'arête CD, cette distance sera la diagonale du quadrilatère ; on aura donc (*Lemme*)

$$k=\frac{\sqrt{\alpha'^2-2\alpha'\beta'Cos.C+\beta'^2}}{Sin.C}\ ;$$

mais, *Sin.*C et *Cos.*C sont connus, et l'on a d'ailleurs (*Prob. I*)

$$\alpha'=(c+d)\,\frac{b^2+(c+d(b-cd}{4\sqrt{bcd(b+c+d)}}\ ,\quad \beta'=(c+d)\,\frac{a^2+(c+d)a-cd}{4\sqrt{acd(a+c+d)}}\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$k=\frac{1}{6T}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} acd(a+c+d)\left\{b^2+(c+d)b-cd\right\}^2 \\ -\left\{b^2+(c+d)b-cd\right\}\left\{a^2+(c+d)a-cd\right\}\left\{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)\right\} \\ +bcd(b+c+d)\left\{a^2+(c+d)a-cd\right\}^2 \end{array}\right\}}\ ;$$

mais, en menant $FD=f$, cette droite est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont k et $\frac{1}{2}(c+d)$ sont les côtés de l'angle droit ; d'où il suit qu'on doit avoir

$$f^2=k^2+\tfrac{1}{4}(c+d)^2=k^2+\frac{9(c+d)^2T^2}{36T^2}\ ;$$

en se rappelant donc que

$$9T^2=abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\ ;$$

il viendra

$f=$

$$f=\frac{6}{6T}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} acd(a+c+d)\{b^2+(c+d)b-cd\}^2+bcd(b+c+d)\{a^2+(c+d)a-cd\}^2 \\ +(c+d)^2\{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\} \\ -\{b^2+(c+d)b-cd\}\{a^2+(c+d)a-cd\}\{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)\} \end{array}\right\}};$$

ou en développant réduisant et décomposant

$$f=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\{(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)\}}{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}\,.$$

Telle est donc l'expression du rayon de la sphère qui contient les centres des quatre sphères données.