ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 220 de ce volume. Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 309-321

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__309_1>

Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 220 de ce volume.

ÉNONCÉ. Quels sont les nombres dont toutes les puissances ont, pour leurs n *derniers chiffres à droite, respectivement, les* n *derniers chiffres à droite de ces nombres eux-mêmes ?*

Première solution ;

Par M. Tédenat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

I. Soient N, N' deux facteurs de n chiffres au moins, et concevons qu'on les ait partagés, l'un et l'autre en deux tranches dont la dernière à droite ait n chiffres. Soient alors respectivement a, a' les tranches de gauche et b, b' les tranches de droite, considérées les unes et les autres comme des nombres isolés, on aura ainsi

$$N=10^n a+b\ ;$$

$$N'=10^n a'+b'\ ;$$

d'où on conclura

$$NN'=\{10^n aa'+(ab'+ba')\}10^n+bb'\ ;$$

A cause du facteur 10^n qui affecte la première partie de ce produit, elle n'aura aucune influence sur ses n derniers chiffres à droite, lesquels ne dépendront ainsi que de b et b'; c'est-à-dire que, pour que le produit de deux nombres ait à sa droite n chiffres donnés, disposés daus un ordre donné, il est nécessaire et il suffit que la dernière tranche de n chiffres de la droite du multiplicande, multipliée par la dernière tranche de n chiffres de la droite du multiplicateur donne un produit qui ait ces mêmes n chiffres à sa droite, disposés entre eux dans l'ordre assigné.

Il suit évidemment de là 1.° que, pour que toutes les puissances d'un nombre aient à leur droite les mêmes n derniers chiffres, il est nécessaire et il suffit que les n derniers chiffres de la droite de son quarré soient respectivement les mêmes que les n chiffres qui le terminent lui-même; 2.° que pour que les n derniers chiffres de la droite du quarré d'un nombre soient respectivement les mêmes que les n derniers chiffres de la droite de ce nombre, il est nécessaire et il suffit que le quarré de sa dernière tranche de n chiffres à droite soit lui-même terminé par ces mêmes chiffres.

Voilà donc la question proposée réduite à celle-ci : *Quels sont les nombres de* n *chiffres qui terminent eux-mêmes leur quarré*? c'est sous ce point de vue que nous allons l'envisager.

II. Il suit, de ce qui vient d'être dit que tout nombre de n chiffre qui termine lui-même son quarré doit avoir pour sa dernière tranche de p chiffres à droite un nombre qui termine aussi lui-même son quarré, p étant un nombre quelconque moindre que n.

Supposons que, le problème ayant déjà été résolu pour les nombres de $n-1$ chiffres, on veuille le résoudre pour les nombres de n chiffres; les nombres cherchés ne pourront être autres que les nombres déjà trouvés, augmentés d'un chiffre sur leur gauche; et il s'agira d'assigner ce chiffre.

Soit a l'un des nombres qui résolvent le problème pour le cas de $n-1$ chiffres, et soit b la tranche de son quarré qui est à gauche de ses $n-1$ derniers chiffres, en sorte qu'on ait

$$a^2=10^{n-1}b+a\ .$$

Soit ensuite A le chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a pour parvenir à un nombre correspondant de n chiffres qui résolve le problème; ce nombre sera ainsi

$$10^{n-1}.A+a\ ;$$

dont le quarré sera

$$10^{2n-2}.A^2+2.10^{n-1}aA+a^2\ ;$$

ou, d'après la précédente valeur de a^2,

$$10^{2n-2}.A^2+2.10^{n-1}aA+10^{n-1}b+a\ ;$$

et il faudra que ce quarré soit terminé par $10^{n-1}.A+a$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à ce nombre plus un multiple quelconque de 10^n. Mais comme, excepté le cas où l'on aurait $n=1$, 10^{2n-2} est toujours tout au moins égal à 10^n; il s'ensuit qu'on peut n'avoir aucun égard à la partie $10^{2n-2}.A^2$ de ce quarré, laquelle tombera toujours au delà du n.me chiffre à gauche, et se contenter de poser

$$2.10^{n-1}aA+10^{n-1}.b+a=10^nx+10^{n-1}A+a\ ;$$

ce qui donne, en réduisant, transposant et divisant par 10^{n-1},

$$(2a-1)A=10x-b\ ;$$

équation que l'on pourra simplifier, dans chaque cas particulier, à raison de l'indétermination de x, en rejetant toutes les dixaines qui se trouveront dans $2a-1$ et b.

Nous voilà donc en état de résoudre le problème, pour une valeur quelconque de n, si nous savons le résoudre pour la valeur de n immédiatement inférieure à celle-là. Nous pourrons donc le résoudre pour toutes les valeurs de n, si nous savons le résoudre pour la seule valeur $n=1$.

Or, pour trouver les solutions qui conviennent à ce cas particulier, il suffit de comparer tous les nombres d'un seul chiffre, y compris 0, à leurs quarrés, ce qui donnera

$$A=0\ ,\ 1\ ,\ 5\ ,\ 6\ .$$

Ce cas ainsi résolu, rien ne sera plus facile que de s'élever aux suivans.

Pour $n=2$, on aura

$$a=0\ ,\ 1\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,$$
$$b=0\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,$$
$$2a-1=9\ ,\ 1\ ,\ 9\ ,\ 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 1\ ;$$
$$A=0\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 7\ .$$

Pour $n=3$, on aura

$$a=00\ ,\ 01\ ,\ 25\ ,\ 76\ ,$$
$$b=\ 0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,$$
$$2a-1=\ 9\ ,\ 1\ ,\ 9\ ,\ 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\,,\,0\,,\,6\,,\,1\,;$$
$$A=0\,,\,0\,,\,6\,,\,3\,.$$

Pour $n=4$, on aura

$$a=000\ ,\ 001\ ,\ 625\ ,\ 376\ ,$$
$$b=\ \ 0\ ,\ \ 0\ ,\ \ 0\ ,\ \ 1\ ,$$
$$2a-1=\ \ 9\ ,\ \ 1\ ,\ \ 9\ ,\ \ 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,$$
$$A=0\,,\,0\,,\,0\,,\,9\,.$$

Pour $n=5$, on aura

$$a=0000\ ,\ 0001\ ,\ 0625\ ,\ 9376\ ;$$
$$b=\ \ 0\ ,\ \ 0\ ,\ \ 9\ ,\ \ 0\ ;$$
$$2a-1=\ \ 9\ ,\ \ 1\ ,\ \ 9\ ,\ \ 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\,;\,0\,,\,9\,,\,0\,,$$
$$A=0\,,\,0\,,\,9\,.\,0\,.$$

On pourrait poursuivre ainsi indéfiniment ; mais il est aisé de voir

1.° Que la série de valeurs 0 , 00 , 000 ,..... se poursuivra toujours indéfiniment suivant la même loi , sans qu'il soit besoin d'en faire le calcul.

2.° Qu'il en sera exactement de même pour la série de valeurs 1 , 01 , 001 ,......

3.° Que , pour la série de valeurs 5 , 25 , 625 ,....., $2a-1$; délivré de ses dixaines, sera toujours 9 ; en sorte que l'équation à résoudre sera $9A=10x-b$; mais, parce que $9A=10A-A$, et que x peut être changé en $A-x$, on pourra à cette équation substituer la suivante

$$A=10x+b\;.$$

4.° Qu'enfin, pour la série de valeurs 6, 76, 376,...., $2a-1$, délivré de ses dixaines, sera toujours 1 ; en sorte que l'équation à résoudre sera simplement

$$A=10x-b\;.$$

On voit donc que, pour parvenir aux solutions, autres que 0 et 1, qui doivent répondre aux diverses valeurs de n, on n'aura à résoudre que la double équation

$$A=10x\pm b\;;$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant qu'il s'agit de valeurs terminées par 5 ou de valeurs terminées par 6 ; et b ayant une valeur propre à chacun de ces deux cas.

Or, comme, d'après ce qui précède, b se réduit toujours à un nombre d'un seul chiffre, et comme A doit aussi avoir un seul chiffre, il faudra faire, pour le signe supérieur, $x=0$, et pour le signe inférieur $x=1$, ce qui donnera les deux formules

$$A=b\quad,\qquad A=10-b\;.$$

Si donc on se rappelle que b, délivré de ses dixaines, n'est autre chose que le n.me chiffre de droite à gauche du quarré de a, on verra que la première série de valeurs peut se calculer directement par cette règle fort simple : *Quarrez le nombre d'un seul chiffre, en rejetant tous les chiffres de ce quarré au delà du second ; et vous aurez ainsi le nombre de deux chiffres. Quarrez celui-ci, en rejetant tous les chiffres de ce quarré au delà du troisième ; et vous aurez le nombre de trois chiffres. Poursuivez ainsi de la même manière, aussi loin que vous le désirerez.* Voici le type du calcul :

5 , premier nombre.
5
25 , deuxième nombre.
25
125
50
625 , troisième nombre.
625
3125
250
50
0625 , quatrième nombre.
0625
3125
1250
750
90625 , cinquième nombre.
. . . .

Il n'y aurait pas grand changement à faire à cette règle, pour la rendre propre au calcul de la seconde série de valeurs ; il ne s'agirait en effet pour cela que de substituer au dernier chiffre admis sur la gauche de chaque produit son complément à 10 ; ainsi qu'on le voit ici

6 , premier nombre.
6
76 , deuxième nombre.

$$\begin{array}{r l}
76 & \text{, deuxième nombre.}\\
76 & \\
\hline
456 & \\
32 & \\
\hline
376 & \text{, troisième nombre.}\\
376 & \\
\hline
2256 & \\
632 & \\
28 & \\
\hline
9376 & \text{, quatrième nombre.}\\
9376 & \\
\hline
56256 & \\
5632 & \\
128 & \\
84 & \\
\hline
09376 & \text{, cinquième nombre.}
\end{array}$$

. . . .

Mais il existe, entre les nombres des deux séries, une relation qui peut conduire plus rapidement au but, et qui est trop curieuse pour la passer sous silence. Remarquons, en effet que, d'après les résultats déjà obtenus, on a

$$5+6=11\,;$$

$$25+76=101\,,$$

$$625+376=1001\,,$$

$$0625+9376=10001\,,$$

ce qui nous conduit à soupçonner que A et A' étant deux nombres de n chiffres qui résolvent le problème, on pourrait bien avoir en général

$$A+A'=10^n+1\,. \qquad (1)$$

Or,

Or, c'est une chose facile à vérifier. A étant un nombre qui résout le problème, on doit avoir

$$A^2=10^n x+A\,; \qquad (2)$$

or, en éliminant A entre ces deux équations, il vient

$$A'^2=10^n(2A'+x-10^n-1)+A'\,;$$

ou, en posant $2A'+x-10^n-1=x'$,

$$A'^2=10^n x'+A'\,; \qquad (3)$$

ce qui prouve que A', liée à A par la relation (1), résout également le problème. Au moyen de cette remarque, on n'aura qu'une seule série de valeurs à calculer.

III. Au lieu de demander que les mêmes n derniers chiffres se reproduisent à la droite de chaque puissance, on pourrait exiger seulement qu'ils se reproduisissent de deux en deux puissances, ou de trois en trois, de quatre en quatre,....., et généralement de m en m; et d'abord les nombres que nous venons précédemment de trouver résoudraient le problème; puisque toute suite de termes égaux peut être considérée comme une suite périodique dont les périodes ont tant et si peu de termes qu'on veut. Mais si l'on exigeait que les mêmes n derniers chiffres reparussent de m en m puissances et pas plutôt, le problème deviendrait possible ou impossible suivant la nature des nombres m et n, ainsi qu'on va le voir.

Supposons, en premier lieu, que les mêmes n derniers chiffres doivent se reproduire de deux en deux puissances; la question se réduira évidemment à trouver un nombre de n chiffres dont les chiffres soient respectivement les n derniers chiffres de la droite de son cube.

Soit a l'un des nombres de $n-1$ chiffres qui résolvent le problème ; soit b la partie de son cube qui est à gauche de ses $n-1$ derniers chiffres, considérée comme un nombre isolé ; on aura

$$a^3=10^{n-1}.b+a\,.$$

Soit ensuite A le chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a pour obtenir un nombre de n chiffres qui résolve le problème ; ce nombre sera

$$10^{n-1}.A+a\,,$$

dont le cube sera

$$10^{3n-3}.A^3+3.10^{2n-2}.aA^2+3.10^{n-1}.a^2A+a^3\,.$$

Les deux premiers termes de ce cube n'ayant aucune influence sur ses n derniers chiffres à droite, seront de nulle considération ; en les supprimant donc, et remettant pour a^3 sa valeur $10^{n-1}.b+a$, il faudra que le nombre résultant soit terminé par $10^{n-1}.A+a$; on aura donc

$$3.10^{n-1}.a^2A+10^{n-1}.b+a=10^n.x+10^{n-1}.A+a\,;$$

ce qui donnera, en réduisant, transposant et divisant par 10^{n-1} ;

$$(3a^2-1)A=10x-b\,;$$

équation, qu'à cause de l'indétermination de x, on pourra simplifier dans chaque cas particulier, en ne prenant que le seul chiffre des unités dans les deux nombres $3a^2-1$ et b.

Il ne s'agit donc plus présentement que de connaître toutes les solutions pour la valeur $n=1$; or, il suffit pour cela de comparer successivement tous les nombres d'un seul chiffre, y compris o, au dernier chiffre de leurs cubes ; ce qui donne sur-le-champ

$$A=0\,,\ 1\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 9\,.$$

On passera de là aux autres cas ainsi qu'il suit :

Pour $n=2$, on aura

$$a = 0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,$$
$$b = 0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,$$
$$3a^2 - 1 = 9\ ,\ 2\ ,\ 7\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 2\ ;$$

d'où on conclura

$$x = 0\ ,\ 0 \text{ ou } 1\ ,\ 2\ ,\ 1 \text{ ou } 3\ ,\ 5\ ,\ 1 \text{ ou } 2\ ;$$
$$A = 0\ ,\ 0 \text{ ou } 5\ ,\ 2\ ,\ 2 \text{ ou } 7\ ,\ 7\ ,\ 4 \text{ ou } 9\ .$$

Pour $n=3$, on aura

$$a = 00\ ,\ 01\ ,\ 51\ ,\ 24\ ,\ 25\ ,\ 75\ ,\ 76\ ,\ 49\ ,\ 99\ ,$$
$$b = 0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 6\ ,\ 2\ ,$$
$$3a^2 - 1 = 9\ ;\ 2\ ,\ 2\ ,\ 7\ ,\ 4\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 2\ ,\ 2\ ;$$

d'où on conclura

$$x = 0, 0 \text{ ou } 1, 1 \text{ ou } 2, 5, 1 \text{ ou } 3, 2 \text{ ou } 4, 3, 1 \text{ ou } 2, 1 \text{ ou } 2\ ;$$
$$A = 0, 0 \text{ ou } 5, 2 \text{ ou } 7, 6, 1 \text{ ou } 6, 3 \text{ ou } 8, 3, 2 \text{ ou } 7, 4 \text{ ou } 9\ ;$$

et ainsi de suite.

Ainsi, en nous bornant là, on voit que les seuls nombres dont les trois derniers chiffres se reproduisent perpétuellement à la droite de leurs puissances impaires, sont les nombres terminés par

000 , 001 , 501 , 251 , 751 , 624 , 125 , 625 , 375 , 875 , 376 , 249 , 749 , 499 , 999 .

Si l'on demandait que la même terminaison reparût seulement de trois en trois puissances, la question se réduirait à trouver un nombre de n chiffres qui terminât lui-même sa quatrième puissance. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, on trouverait facilement que, a étant un des nombres qui résout le problème pour le cas de $n-1$ chiffres, et b étant le $n.^{me}$ chiffre de sa quatrième puissance ; si l'on désigne par A le nombre d'un seul chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a, pour obtenir un nombre de n chiffres qui résolvent également le problème, on doit avoir l'équation

$$(4a^3-1)A=10x-b,$$

dans laquelle $4a^3-1$ peut être réduit à ses seules unités.

La comparaison des nombres d'un seul chiffre à leur quatrième puissance donne, pour le cas de $n=1$,

$$A=0,\ 1,\ 5,\ 6.$$

On aurait ensuite, pour $n=2$,

$$a=0,\ 1,\ 5,\ 6,$$

$$b=0,\ 0,\ 2,\ 9,$$

$$4a^3-1=9;\ 3,\ 9,\ 3;$$

d'où on conclurait

$$x=0,\ 0,\ 2,\ 3,$$

$$A=0,\ 0,\ 2,\ 7.$$

Ainsi, il n'y a que les seuls nombres terminés par 00, 01, 25, 76 dont les deux derniers chiffres se reproduisent périodiquement à la droite de leurs puissances de trois en trois.

En suivant le même raisonnement pour les cas subséquents, on trouvera facilement que, s'il faut que les mêmes n derniers chiffres se reproduisent périodiquement de m en m puissances ; en désignant par a un des nombres de $n-1$ chiffres qui résolvent le problème, par A le nombre d'un seul chiffre qu'il faut écrire à sa gauche pour obtenir un nombre de n chiffres qui le résolve également ; et enfin par b le n.me chiffre de a^{m+1} ; on doit avoir

$$\{(m+1)a^m-1\}A=10x-b.$$

et les applications à des cas particuliers se feront comme il a été enseigné ci-dessus.

IV. On pourrait compliquer encore la question ; en demandant que les terminaisons des puissances ne soient pas immédiatement périodiques ; de manière que les terminaisons périodiques soient précédées d'un nombre donné de terminaisons qui leur soient étrangères ; comme on en voit un exemple dans les nombres terminés par 15, dont les puissances successives ont pour terminaisons 15, 25, 75, 25, 75,..... ; de manière que les périodes, qui ont deux termes, sont précédées du terme 15 qui leur est étranger ; ce qui tient à ce que la fraction $\frac{15}{100}$ réduite à ses moindres termes est $\frac{3}{20}$, dont le dénominateur 20 conserve un facteur 5 commun avec la base 15. Mais nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet qui se rattache d'ailleurs à une théorie déjà développée dans les *Annales* d'une manière fort lumineuse (*).

(*) Voyez un mémoire de M. Penjon, sur la *Transformation des fractions*, dans le IV.e volume des *Annales*, page 262.