GERGONNE

Analise transcendante. Développement en séries des fonctions logarithmiques et exponentielles

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 363-367
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__363_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Développement en séries des fonctions logarithmiques et exponentielles ;

Par M. GERGONNE.

J'AI donné, dans le troisième volume de ce recueil (page 344), une méthode de développement des fonctions circulaires en séries qui me semble fort courte et fort simple. Je me propose ici de parvenir, par des moyens analogues, au développement des fonctions logarithmiques et exponentielles ; de manière que les deux articles pourront se servir de suite l'un à l'autre.

I. Le logarithme de l'unité étant nul, dans tout système logarithmique, on est fondé à supposer, quel que soit x,

$$\text{Log.}(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots\ldots ; \qquad (1)$$

A, B, C,..... étant des coefficiens inconnus qu'il s'agit de déterminer.

On aura semblablement

$$\text{Log.}(1+y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots , \qquad (2)$$

et

$$\text{Log.}\left\{1+\left(\frac{x-y}{1+y}\right)\right\}=A\left(\frac{x-y}{1+y}\right)+B\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2+C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3+\ldots \quad (3)$$

Mais on a

$$\text{Log.}(1+x)-\text{Log.}(1+y)=\text{Log.}\frac{1+x}{1+y}=\text{Log.}\left\{1+\left(\frac{x-y}{1+y}\right)\right\};$$

substituant donc les valeurs (1), (2), (3), il viendra, en divisant les deux membres de l'équation résultante par $x-y$, et en les multipliant par $1+y$,

$$(1+y)\{A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+D(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\ldots\}$$
$$=A+B\left(\frac{x-y}{1+y}\right)+C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2+D\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3+\ldots.$$

Dans cette dernière équation, x et y demeurant indéterminés et indépendans, on peut supposer $y=x$; elle devient ainsi

$$(1+x)(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots\ldots)=A\ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$\begin{array}{r|r|r|l} 2B & x+3C & x^2+4D & x^3+\ldots\ldots=0\ . \\ +A & +2B & +3C & \end{array}$$

Ce qui donnera, à cause de l'indétermination de x,

$$\left.\begin{array}{r} 2B+A=0\ , \\ 3C+2B=0\ , \\ 4D+3C=0\ , \\ \ldots\ldots=0\ ; \end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l} B=-\frac{1}{2}A\ , \\ C=+\frac{1}{3}A\ , \\ D=-\frac{1}{4}A\ , \\ \ldots\ldots\ ; \end{array}\right.$$

substituant donc dans (1), il viendra

$$\text{Log.}(1+x)=A(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\ldots \qquad (4)$$

Dans cette formule, A demeure arbitraire; mais cela doit être ainsi, puisqu'à raison du choix arbitraire de la base, à un même nombre peut répondre une infinité de logarithmes différens.

Si, dans cette formule (4), on change x en $x-1$, elle deviendra

$$\text{Log.}x=A\{(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\tfrac{1}{4}(x-1)^4+\ldots..\}\ . \qquad (5)$$

Soit b la base du système logarithmique, et soit successivement changé

changé x, dans cette dernière formule, en $\sqrt[m]{x}$ et en $\sqrt[n]{b}$, elle deviendra

$$\mathrm{Log}.x=mA\{(\sqrt[m]{x}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{x}-1)^3-\ldots\},$$

$$1=nA\{(\sqrt[n]{b}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{b}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{b}-1)^3-\ldots\};$$

d'où on conclura, en divisant,

$$\mathrm{Log}.x=\frac{m}{n}\cdot\frac{(\sqrt[m]{x}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{x}-1)^3-\ldots}{(\sqrt[n]{b}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{x}-1)^3-\ldots};$$

expression que l'on peut toujours facilement rendre convergente à volonté, en prenant pour m et n des puissances de 2 d'un degré très-élevé. On trouvera, au surplus, dans le premier volume de ce recueil (page 18) de très-amples développemens sur le parti que l'on peut tirer de la formule (4), dans le calcul des tables de logarithmes.

II. Le logarithme de l'unité étant nul, dans tout système de logarithmes, on est fondé à supposer, quel que soit x,

$$x=1+A\mathrm{Log}.x+B\mathrm{Log}.^2x+C\mathrm{Log}.^3x+\ldots \tag{6}$$

A, B, C,..... étant des coefficiens inconnus qu'il s'agit de déterminer.

On aura semblablement

$$y=1+A\mathrm{Log}.y+B\mathrm{Log}.^2y+C\mathrm{Log}.^3y+\ldots \tag{7}$$

et

$$\frac{x}{y}=1+A\mathrm{Log}.\frac{x}{y}+B\mathrm{Log}.^2\frac{x}{y}+C\mathrm{Log}.^3\frac{x}{y}+\ldots;$$

série que l'on peut encore écrire ainsi

$$\frac{x}{y}=1+A(\mathrm{Log}.x-\mathrm{Log}.y)+B(\mathrm{Log}.x-\mathrm{Log}.y)^2+C(\mathrm{Log}.x-\mathrm{Log}.y)^3+\ldots \tag{8}$$

Mais on a

$$x-y=y\left(\frac{x}{y}-1\right);$$

substituant donc les valeurs (6), (7), (8), il viendra, en divisant les deux membres de l'équation résultante par $\mathrm{Log}.x-\mathrm{Log}.y$,

$$A+B(\text{Log}.x+\text{Log}.y)+C(\text{Log}.^2x+\text{Log}.x\text{Log}.y+\text{Log}.^2y)+\ldots\ldots$$
$$=y\{A+B(\text{Log}.x-\text{Log}.y)+C(\text{Log}.x-\text{Log}.y)^2+\ldots\ldots\}$$

Dans cette dernière équation, x et y devant demeurer indéterminés et indépendans, on peut supposer $y=x$; elle devient ainsi

$$A+2B\text{Log}.x+3C\text{Log}.^2x+4D\text{Log}.^3x+\ldots\ldots=Ax\ ;$$

ou, en mettant pour x sa valeur (6) et réduisant,

$$2B\text{Log}.x+3C\text{Log}.^2x+4D\text{Log}.^3x+\ldots\ldots$$
$$=A^2\text{Log}.x+AB\text{Log}.^2x+AC\text{Log}.^3x+\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donnera, à cause de l'indétermination de x,

$$\left.\begin{array}{l}2B=A^2\ ,\\ 3C=AB\ ,\\ 4D=AC\ ,\\ \ldots\ldots\ ;\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}B=\dfrac{A^2}{1.2}\ ;\\ C=\dfrac{A^3}{1.2.3}\ ,\\ D=\dfrac{A^4}{1.2.3.4}\ ,\\ \ldots\ldots\ ;\end{array}\right.$$

substituant donc dans (6), il viendra

$$x=1+\frac{A\text{Log}.x}{1}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2}+\frac{A^3\text{Log}.^3x}{1.2.3}+\ldots\ldots \qquad (9)$$

formule dans laquelle A demeure arbitraire, pour les même raisons que ci-dessus.

III. On se tromperait étrangement si l'on pensait que l'indéterminée A est la même dans la formule (9) que dans la formule (4); puisque ces deux formules ont été déterminées indépendamment l'une de l'autre. Il existe néanmoins entre ces deux indéterminées une relation simple facile à découvrir. Observons pour cela qu'on tire des équations (5) et (9), en changeant A en A' dans la première,

$$\text{Log}.x=A'(x-1)\{1-\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{3}(x-1)^2-\ldots\ldots\}\ ,$$
$$x-1=A\text{Log}.x\left\{1+\frac{A\text{Log}.x}{1.2}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2.3}-\ldots\ldots\right\}\ ;$$

ce qui donne, en multipliant membre à membre, et supprimant de part et d'autre le facteur $(x-1)\text{Log}.x$,

$$1=AA'\{1-\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{3}(x-1)^2-\ldots\}\left\{1+\frac{A\text{Log}.x}{1.2}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2.3}+\ldots\right\};$$

faisant enfin, dans cette dernière équation $x=1$, on arrivera à cette relation simple

$$AA'=1\,.$$

Ainsi, l'on peut écrire

$$\text{Log}.x=\frac{1}{A}\left\{(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\ldots\ldots\right\}, \qquad (10)$$

$$x=1+\frac{A\text{Log}.x}{1}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2}+\frac{A^3\text{Log}.^3x}{1.2.3}+\ldots\,; \qquad (11)$$

la constante A étant alors la même dans les deux formules.

Cette constante étant arbitraire, la supposition la plus simple qu'on puisse faire à son égard est $A=1$; on tombe alors sur les logarithmes *népériens* ou *naturels*. En les désignant simplement par l, on a

$$\text{l}x=(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\ldots\ldots, \qquad (12)$$

$$x=1+\frac{\text{l}x}{1}+\frac{\text{l}^2x}{1.2}+\frac{\text{l}^3x}{1.2.3}+\ldots\ldots \qquad (13)$$

Si, dans la dernière de ces deux formules, on change x en b^x, b étant la base d'un système quelconque, on aura

$$b^x=1+\frac{x\text{l}b}{1}+\frac{x^2\text{l}^2b}{1.2}+\frac{x^3\text{l}^3b}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

En désignant par e la base du système de Néper, et changeant b en e, dans cette dernière formule, on aura

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Si enfin dans celle-ci on fait $x=1$, on aura, pour calculer la base e du système de Néper, cette série très-commode et très-convergente

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$