ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

DUBUAT

Solution du problème de dynamique proposé à la page 320 du 4.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 55-59

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__55_0>

Solution du problème de dynamique proposé à la page 320 du 4.e volume de ce recueil ;

Par M. DUBUAT, professeur à l'école de l'artillerie et du génie.

ÉNONCÉ. *Le point de suspension d'un pendule simple, à l'état de repos, étant subitement entraîné, d'un mouvement rectiligne et uniforme, avec une vitesse connue, le long d'une droite horizontale, on propose d'assigner la nature de la trajectoire décrite par l'extrémité inférieure de ce pendule, ainsi que toutes les autres circonstance du mouvement; en faisant toutefois abstraction de la résistance du milieu ?*

Solution. Prenons le point de suspension du pendule à l'état de repos pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite parcourue par ce point pour axe des x ; si nous prenons pour unité la longueur du pendule, et que nous supposions qu'à l'époque t l'abscisse de son point de suspension est x', et les coordonnées de son extrémité inférieure x, y, nous aurons les équations de condition

$$(x-x')^2+y^2=1\,, \qquad (1) \qquad\qquad x'=bt\;; \qquad (2)$$

b désignant la vitesse constante du point de suspension.

Si, de plus, nous prenons la masse de ce pendule pour unité, et que nous désignons par μ la tension inconnue de sa verge, et par g la gravité, les équations du mouvement seront

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\mu(x-x')\,, \qquad (3) \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\mu y-g\,; \qquad (4)$$

Soient $x-x'=\text{Sin}.4\varphi$, $y=\text{Cos}.4\varphi$; on aura, en substituant et ayant égard à l'équation (2),

$$4\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\text{Cos}.4\varphi-16\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\text{Sin}.4\varphi=\mu\text{Sin}.4\varphi\,; \qquad (5)$$

$$-4\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\text{Sin}.4\varphi-16\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\text{Cos}.4\varphi=\mu\text{Cos}.4\varphi-g\,; \qquad (6)$$

équations entre lesquelles éliminant μ, il viendra

$$4\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=g\text{Sin}.4\varphi\,;$$

et, en multipliant par $4\mathrm{d}\varphi$ et intégrant

$$8\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2=g(C-\text{Cos}.4\varphi)=g(C-1+2\text{Sin}.^2 2\varphi)\,;$$

mais l'angle φ devant être nul en même temps que la vitesse angulaire, on doit avoir $C=1$, et par conséquent, en séparant les variables

$$\mathrm{d}t\sqrt{g}=\frac{2\mathrm{d}\varphi}{\text{Sin}.2\varphi}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\text{Sin}.\varphi\text{Cos}.\varphi}=\frac{\mathrm{d}\varphi(\text{Sin}.^2\varphi+\text{Cos}.^2\varphi)}{\text{Sin}.\varphi\text{Cos}.\varphi}\,,$$

ou enfin

dt

$$dt\sqrt{g}=\frac{d\varphi\text{Cos.}\varphi}{\text{Sin.}\varphi}+\frac{d\varphi\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi}=\frac{d.\text{Sin.}\varphi}{\text{Sin.}\varphi}-\frac{d.\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi}\,,$$

d'où en intégrant et faisant la constante nulle, attendu que t et tang.4φ doivent être nuls en même temps,

$$t\sqrt{g}=\text{Log.Sin.}\varphi-\text{Log.Cos.}\varphi=\text{Log.}\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi}=\text{Log.Tang.}\varphi\,,$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}\varphi=e^{t\sqrt{g}}\,.$$

de là on tire

$$\text{Tang.}4\varphi=\frac{4\text{Tang.}\varphi-4\text{Tang.}^3\varphi}{1-6\text{Tang.}^2\varphi+\text{Tang.}^4\varphi}=\frac{4e^{t\sqrt{g}}-4e^{3t\sqrt{g}}}{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}\,;$$

et par suite

$$\text{Sin.}4\varphi=\frac{\text{Tang.}4\varphi}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2 4\varphi}}=\frac{4e^{t\sqrt{g}}(1-e^{2t\sqrt{g}})}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}\,;$$

$$\text{Cos.}4\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2 4\varphi}}=\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}\,.$$

Donc

$$x=bt+4e^{t\sqrt{g}}\cdot\frac{1-e^{2t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}\,;\qquad y=\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}\,.$$

et telles sont les équations qui donnent la situation du mobile à chaque instant ; on en tire

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b+4\sqrt{g}\,.\,e^{t\sqrt{g}}\,.\,\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-16\sqrt{g}\,.\,e^{2t\sqrt{g}}\,.\,\frac{1-e^{2t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^3}\,;$$

l'élimination de dt et de $e^{t\sqrt{g}}$ entre ces deux équations et la valeur de y donnerait l'équation différentielle de la trajectoire ; mais cette équation serait probablement fort compliquée.

Si l'on fait $t=0$, on trouve $x=0$, $y=-1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$, ce qui prouve que les constantes sont déterminées conformément aux conditions particulières de la question.

Si l'on égale la valeur de y à zéro, il vient

$$e^{4t\sqrt{g}}-6e^{2t\sqrt{g}}+1=0\,,$$

d'où

$$e^{2t\sqrt{g}}=3\pm2\sqrt{2}$$

et par conséquent

$$t=\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathrm{Log.}(3\pm2\sqrt{2})\,,$$

ce qui donne pour t deux valeurs, l'une positive et l'autre négative, c'est-à-dire, antérieure à l'époque d'où on compte les temps.

La valeur de $\frac{dy}{dt}$ montre ensuite que y parvient à son *maximum* lorsque t est infini, et la valeur de y prouve que ce *maximum* est $+1$.

Quand à l'abscisse qui répond à $y=0$ ou $e^{2t\sqrt{g}}=3+2\sqrt{2}$, elle est

$$x=\frac{b}{2\sqrt{g}}\text{Log.}(3+2\sqrt{2})-1\ ;$$

elle peut être positive nulle ou négative, suivant que la vitesse b sera plus ou moins grande.

Il résulte de tout ce qui précède que la courbe décrite par l'extrémité inférieure du pendule a une branche très-courte au-dessous de l'axe des x, et une branche asymptotique au-dessus du même axe, l'asymptote étant une parallèle à l'axe des x, dont l'ordonnée constante est égale à l'unité.

Les diverses circonstances que peut présenter la trajectoire sont représentées par les figures 6, 7, 8, dans lesquelles CP est le pendule au repos, c'est-à-dire, dans sa position initiale, CD l'horizontale que l'on fait parcourir, de gauche à droite à son point de suspension et enfin AB l'asymptote.