ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Géométrie des surfaces courbes. De la génération des paraboloïdes elliptique et hyperbolique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 122-125
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__122_1>

GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

De la génération des paraboloïdes elliptique et hyperbolique ;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Toute parabole, rapportée à deux axes quelconques, formant entre eux un angle γ, est, comme l'on sait, exprimée par une équation de la forme

$$(Ax+By)^2+2(A'x+B'y)+C=0 \; . \qquad (2)$$

Supposons que, par une transformation de coordonnées, on soit parvenu à rapporter la courbe à son diamètre principal, pris pour axe des t, et à la tangente à son sommet, prise pour axe des u; supposons de plus que, par suite de cette transformation, l'équation soit devenue

$$u^2=2Pt\,, \qquad (2)$$

P étant conséquemment le demi-paramètre.

Si l'on désigne par a, b, respectivement les coordonnées de l'origine primitive rapportée aux axes de t et des u, et par α, β les angles que font respectivement les axes des x et des y avec l'axe des t, on repassera, comme l'on sait, du système transformé au système primitif, en posant

$$\left.\begin{aligned} t&=a+x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta\,,\\ u&=b+x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta\,. \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

En faisant la substitution dans l'équation (2), on obtiendra la transformée

$$(x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta)^2+2\{(b\text{Sin.}\alpha-P\text{Cos.}\alpha)x+(b\text{Sin.}\beta-P\text{Cos.}\beta)y\}+(b^2-Pa)=0\,;$$

laquelle ne devra différer au plus de l'équation (1) que par un facteur commun à tous ses termes; désignant donc ce facteur par λ^2, on aura

$$\text{Sin.}\alpha=\lambda A\,,\quad b\text{Sin.}\alpha-P\text{Cos.}\alpha=\lambda^2A'\,,$$

$$\text{Sin.}\beta=\lambda B\,,\quad b\text{Sin.}\beta-P\text{Cos.}\beta=\lambda^2B'\,,$$

$$b^2-2Pa=\lambda^2C\,;$$

équations auxquelles il faudra joindre l'équation de condition

$$\text{Cos.}(\beta-\alpha)=\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta=\text{Cos.}\gamma\,;$$

Or, de ces six équations la cinquième est la seule qui renferme u et C, d'où il suit que les cinq autres sont suffisantes pour déterminer les cinq quantités a, b, α, β, P, et que ces quantités sont des fonctions de A, B, A', B' seulement.

Observons en outre que, dans le système transformé, l'équation du diamètre principal étant $u=0$, l'équation de ce diamètre sera, dans le système primitif (3),

$$x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta+b=0\ ;$$

puis donc que cette équation ne renferme point a, la détermination des constantes qu'elle contient sera indépendante de C.

Il est donc établi, par ce qui précède, que *si, dans l'équation d'une parabole, rapportée à deux axes obliques quelconques, on fait seulement varier le dernier terme, on fera simplement glisser son sommet le long de son diamètre principal, considéré comme droite indéfinie, sans changer aucunement la position de ce diamètre ni les dimensions de la courbe.*

Les mêmes considérations établissent que réciproquement *si, sans changer aucunement les dimensions d'une parabole ni la situation de son diamètre principal, on fait simplement glisser son sommet le long de ce diamètre; à quelque système d'axes que la courbe soit d'ailleurs rapportée, on pourra toujours amener sa nouvelle équation à ne différer de la première que par son dernier terme.*

Il en irait absolument de même si l'on faisait glisser un point quelconque de la courbe le long d'un diamètre passant par ce point, puisqu'alors le sommet de cette parabole parcourrait aussi son diamètre principal.

Cela posé, soit un paraboloïde quelconque, elliptique ou hyperbolique. Par l'un quelconque de ses points menons-lui un diamètre et un plan tangent; menons-lui ensuite un plan secant parallèle à ce plan tangent; la section sera une ellipse ou une hyperbole; menons à cette courbe deux diamètres conjugués quelconques; et menons,

sur

sur le plan tangent, deux parallèles à ces diamètres. Soient prises ces deux parallèles pour axes des x et des y, et le diamètre du paraboloïde qui passe par leur intersection pour axe des z; l'équation de cette surface sera, comme l'on sait

$$Ax^2 \pm By^2 + Cz = 0\,;$$

A et B étant de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique.

Or, présentement, soit qu'on donne à x ou à y une suite de valeurs particulières, on obtiendra toujours une suite d'équations de paraboles ne différant uniquement que par le terme tout connu, et qui répondront conséquemment, d'après ce qui a été dit précédemment, à des paraboles égales, ayant toutes un même point de leur périmètre sur le plan des xz ou sur celui des yz. On peut donc de cette observation deduire les conséquences que voici :

I. Les sections paraboliques faites à un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, par des plans parallèles quelconques, sont des paraboles égales entre elles, ayant leurs points homologues situés sur d'autres paraboles aussi égales entre elles et comprises dans des plans parallèles.

II. Réciproquement, tout paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, peut être conçu engendré par le mouvement d'une parabole, de grandeur invariable, demeurant constamment parallèle à un même plan, et dont l'un quelconque des points décrit une autre parabole, fixée de grandeur et de situation dans l'espace.

La différence entre le paraboloïde elliptique et le paraboloïde hyperbolique ne consiste donc uniquement qu'en ce que la parabole *génératrice* et la parabole directrice ont leur concavité tournées dans le même sens pour le premier, et en sens inverse pour le second.

Le cylindre parabolique et le plan ne sont que des cas particuliers de cette génération ; le premier a lieu lorsque la parabole génératrice ou la parabole directrice dégénère en ligne droite ; le second répond au cas où cela arrive à la fois à toutes les deux.