J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution du III.e problème de géométrie proposé à la page 28 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 169-171

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__169_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du III.e problème de géométrie proposé à la page 28 de ce volume;

Par M. J. B. Durrande.

PROBLÈME. *Des trois quarrés qui peuvent être inscrits à un même triangle scalène, quel est le plus grand et quel est le plus petit?*

Solution. Il est évident que ce problème se réduit au suivant:

Des deux quarrés inscrits qui reposent sur deux côtés inégaux d'un même triangle, quel est le plus grand et quel est le plus petit?

C'est donc sous ce point de vue que nous allons le résoudre.

Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle; a', b' les perpendiculaires abaissées respectivement sur les directions de a et b

des sommets opposés ; et x, y les côtés des quarrés inscrits, reposant respectivement sur a et b comme bases. Soient enfin r le rayon du cercle circonscrit, et t l'aire du triangle.

Il est d'abord évident que x et y seront déterminés par les proportions

$$a' : a :: (a'-x) : x \;,$$

$$b' : b :: (b'-y) : y \;;$$

desquelles on tire

$$x=\frac{aa'}{a+a'} \;, \quad y=\frac{bb'}{b+b'} \;.$$

Or, on a

$$2t=aa'=bb' \;;$$

d'où

$$a'=\frac{2t}{a} \;, \quad b'=\frac{2t}{b} \;;$$

donc encore, en substituant,

$$x=\frac{2at}{a^2+2t} \;, \quad y=\frac{2bt}{b^2+2t} \;.$$

Enfin on a (*Applicat. de l'alg. à la géom.* de LACROIX)

$$r=\frac{abc}{4t}, \quad \text{d'où} \quad 2t=\frac{abc}{2r} \;;$$

donc enfin

$$x=\frac{abc}{2ar+bc} \;, \quad y=\frac{abc}{2br+ca} \;.$$

Ces deux valeurs ayant le même numérateur, nous jugerons de leur grandeur relative en comparant leurs dénominateurs ; or,

$$(2ar+bc)-(2br+ca)=2r(a-b)-c(a-b)=(2r-c)(a-b) \;;$$

et, comme c ne peut jamais surpasser $2r$, il s'ensuit que cette différence suivra le signe de $a-b$; si donc on suppose $a>b$, on aura aussi

$$2ar+bc>2br+ca \,,$$

et conséquemment

$$x<y \;;$$

ainsi, des quarrés inscrits qui posent sur deux côtés d'un triangle, le plus petit est celui qui pose sur le plus grand de ces deux côtés.

Il est aisé de conclure de là que des trois quarrés inscrits à un même triangle scalène, le plus grand pose sur le plus petit côté, le moyen sur le moyen et le plus petit sur le plus grand.

Si l'on demandait dans quel cas deux de ces quarrés sont égaux, on exprimerait cette condition en posant

$$(2r-c)(a-b)=o \;;$$

ce qui donne $a=b$ ou $c=2r$; ainsi cela a lieu, 1.° lorsque les côtés sur lesquels reposent ces quarrés sont égaux; 2.° lorsque ces côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. Dans ce dernier cas, les deux quarrés se confondent.