ARGAND

Solution du problème de combinaisons proposé à la page 328 du V.e volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 21-27
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__21_1>

Solution du problème de combinaisons proposé à la page 328 du V.e volume de ce recueil ;

Par M. ARGAND.

PROBLÈME. *Avec* m *choses , toutes différentes les unes des autres , de combien de manières peut-on faire* n *parts , avec la faculté de faire des parts nulles ?*

Solution 1. Désignons , en général , par (m, n) l'*ensemble* de toutes les manières de faire , avec m choses , n parts dont aucune ne soit nulle ; et par $Z_{(m,n)}$ *le nombre* de ces manières.

Soient c le nombre des choses , p celui des parts , k l'une de ces choses à volonté , R l'ensemble des $c-1$ autres choses. On pourra , dans l'ensemble (c,p) , distinguer deux espèces de répartitions ; savoir : des répartitions (I) dans lesquelles la chose k formera à elle seule une part , et des répartitions (II) où la chose k se trouvera réunie , dans une même part , avec une ou plusieurs des choses R ,

2. Considérons d'abord les répartitions r, r', r'', ... appartenant à l'espèce (I). Si de chacune de ses répartitions on retranche la part formée par k, il restera des répartitions ρ, ρ', ρ'', ... de $c-1$ choses distribuées en $p-1$ parts, ou, suivant notre notation, des répartitions appartenant à l'ensemble $(c-1, p-1)$. Réciproquement si, à des répartitions ρ, ρ', ρ'', ... contenues dans ce dernier ensemble, on ajoute une part formée d'une nouvelle chose k, on obtiendra r, r', r'', ... de l'espèce (I). Il est de plus évident que, si r, r', r'', ... ne sont pas identiques, ρ, ρ', ρ'', ... ne le seront pas non plus, et réciproquement; d'où il suit que le nombre des répartitions (I) est égal à celui des répartitions $(c-1, p-1)$, lequel est exprimé, suivant notre notation, par $Z_{(c-1,p-1)}$.

3. Retranchons la chose k de chacune des répartitions de l'espèce (II); nous aurons diminué d'une unité le nombre des choses, sans changer celui des parts; ainsi, les répartitions résultant de ce retranchement appartiendront à l'ensemble $(c-1, p)$. Réciproquement, ayant une répartition appartenant à ce dernier ensemble, si l'on ajoute la chose k à l'un quelconque des parts de cette répartition, on obtiendra une répartition de l'espèce (II); et, comme il y a p parts, et par conséquent p manières de faire cette adjonction, chaque répartition de l'ensemble $(c-1, p)$ produira p répartitions de l'espèce (II), lesquelles seront évidemment différentes entre elles. De plus, il est facile de voir que deux répartitions différentes de l'ensemble $(c-1, p)$ le seront encore lorsqu'on y aura ajouté k d'une manière quelconque. Donc le nombre des répartitions (II) est p fois celui des répartitions $(c-1, p)$; c'est-à-dire, qu'il est $=pZ_{(c-1,p)}$.

Ainsi, (c, p) étant composé de (I) et de (II), on aura

$$Z_{(c,p)}=p.Z_{(c-1,p)}+Z_{(c-1,p-1)}. \qquad \text{(A)}$$

4. Au moyen de cette équation, nous pourrons former une table à double entrée des valeurs de $Z_{(c,p)}$, pourvu que nous en connaissions les valeurs initiales. Or, si $p=1$, on a $Z_{(c,p)}=1$; car, quel que soit le nombre des choses, il n'y a qu'une manière

d'en faire une seule part. Cette formule donne donc la première ligne horizontale de la table. Ensuite, si $p=c$, on a encore $Z_{(c,\,p)}=1$; car il n'y a de même qu'une manière de faire n part avec n choses. Cette formule fournit la diagonale qui part de la case qui répond à $c=1$, $p=1$. Quant au cas où on aurait $p>c$, il est clair qu'il n'y répond aucune répartition possible, de sorte que toutes les cases situées de l'un des côtés de notre diagonale doivent demeurer vides.

Table des valeurs de $Z_{(c,\,p)}$.

Nombre de choses $=c$.

Nombre de parts $=p$.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127	255	511
3			1	6	25	90	301	966	3025	9330
4				1	10	65	350	1701	7770	34105
5					1	15	140	1050	6951	42525
6						1	21	266	2646	22827
7							1	28	462	5880
8								1	36	750
9									1	45
10										1

5. Or, à l'inspection de cette table, on trouve, par une induction assez facile,

$$Z_{(c,p)}=\frac{1}{1.2.3.....p}\left\{p^c-\frac{p}{1}(p-1)^c+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}(p-2)^c-....\right\}; \quad \text{(B)}$$

et on s'assure ensuite, par le calcul, que cette expression de $Z_{(c,p)}$ satisfait réellement à l'équation (A); mais il faut de plus que les valeurs initiales soient vérifiées. Or, si $p=1$, la formule se réduit, en effet, à l'unité, il en est de même, dans le cas de $c=p$, en vertu du théorème connu : $1.2.3..p=p^p-\frac{p}{1}(p-1)^p+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}(p-2)^p-....$; ainsi, cette formule est démontrée.

6. Nous avons supposé jusqu'ici qu'aucune part ne devait être nulle. Admettons maintenant qu'un nombre quelconque de parts puissent l'être; et nommons $Y_{(c,p)}$ le nombre des répartitions possibles dans cette nouvelle hypothèse. L'ensemble de toutes ces répartitions pourra être distribué en p espèces, suivant que le nombre des parts non nulles, qui ne saurait être zéro, sera 1, 2, $3....p$. Soit q un quelconque de ces nombres. Le nombre des répartitions dans lesquelles q parts ne sont pas nulles est, par ce qui précède, $Z_{(c,q)}$; donnant donc successivement à q toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à p inclusivement, on aura

$$Y_{(c,p)}=Z_{(c,1)}+Z_{(c,2)}+Z_{(c,3)}+.....+Z_{(c,p)};$$

on aurait de même

$$Y_{(c,p-1)}=Z_{(c,1)}+Z_{(c,2)}+Z_{(c,3)}+......+Z_{(c,p-1)};$$

d'où, en retranchant et transposant

$$Y_{(c,p)}=Y_{(c,p-1)}+Z_{(c,p)}. \quad \text{(C)}$$

Ainsi, au moyen de la table précédente, et des valeurs initiales de Y, savoir $Y_{(c,1)}=1$, pour toutes les valeurs de c, on construira facilement la table relative à la seconde hypothèse, par de simples additions.

Table

Table des valeurs de $Y_{(c,p)}$

Nombre de choses $=c$.

Nombre de parts $=p$.

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	1	2	5	14	41	122	365	1094	3281	9842
4	1	2	5	15	51	187	715	2795	11051	43947
5	1	2	5	15	52	202	855	3845	18002	86472
6	1	2	5	15	52	203	876	4111	20648	109299
7	1	2	5	15	52	203	877	4139	21110	115179
8	1	2	5	15	52	203	877	4140	21146	115929
9	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115974
10	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

7. La loi des valeurs de Y, dans cette dernière table, ne se présente pas si facilement que dans la première. Cependant, avec de l'attention, on parvient à trouver que ces valeurs peuvent être exprimées par la formule

$$Y_{(c,p)}=\frac{1}{1.2....p}\left\{p^c+0.\frac{p}{1}(p-1)^c+1.\frac{p}{1}.\frac{p-1}{1.2}(p-2)^c\right.$$

$$\left.+2.\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}.\frac{p-2}{3}(p-3)^c+..\right\}; \quad \text{(D)}$$

dans laquelle les coefficiens 0, 1, 2, 9, 44, 265, ... sont liés entre eux par les équations.

$$0=1.1-1,$$

$$1=2.0+1,$$

$$2=3.1-1,$$

$$9=4.2+1,$$

$$44=5.9-1,$$

$$.........;$$

ou, en général,

$$a_n=n.a_{n-1}+(-1)^n; \qquad \text{(E)}$$

le quantième n du premier terme de la formule étant 0.

On s'assure ensuite, par un calcul effectif, qu'elle satisfait à l'équation (C). De plus, en faisant $p=1$, elle se réduit à l'unité, ce qui vérifie les valeurs initiales ; d'où il suit que cette formule résout le problème proposé. L'expression générale des coefficiens 0, 1, 2, 9, 44, ..., est au surplus

$$a_n=(-1)^n\{1-n+n(n-1)-n(n-1)(n-2)+\ldots\ldots\}\;;$$

car, outre que cette expression satisfait à l'équation (E), elle donne la valeur initiale $a_0=1$ (*).

8. En éliminant Z entre les deux équations (A), (C), on parvient facilement à la suivante

$$Y_{(c,p)}=pY_{(c-1,p)}+Y_{(c,p-1)}-(p-1)Y_{(c-1,p-1)}-Y_{(c-2,p-1)}\;;$$

qui a conséquemment pour intégrale la formule (D), tout comme (A) a pour intégrale la formule (B); mais ces intégrales, pour être complètes doivent admettre un complément arbitraire.

(*) Ces coefficiens peuvent encore être considérés comme liés entre eux par l'équation aux différences

$$a_n=n(a_{n-1}+a_{-1})\,.$$

J. D. G.