ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Solution du deuxième problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 225-228
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__225_1>

Solution du deuxième problème ;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

§. I.

Trouver le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre ?

Soient ABCD le tétraèdre donné ;

$Aire\,BCD=A$, $Aire\,CDA=B$, $Aire\,DAB=C$, $Aire\,ABC=D$;

T le volume du tétraèdre ; r le rayon de la sphère inscrite ;

$AD=a$, $BD=b$, $CD=c$, $BC=d$, $CA=e$, $AB=f$;

o le centre de la sphère inscrite, a', b', c' ses coordonnées respectivement parallèles à a, b, c, le sommet D étant l'origine ;

g, h, k les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C sur les plans des faces opposées A, B, C ;

Enfin, α, β, γ les angles que forment deux à deux les arêtes a, b, c.

En concevant le tétraèdre comme composé de quatre autres ayant leur sommet commun au point o, et ayant pour bases les quatre faces A, B, C, D du premier ; leur hauteur commune sera le rayon cherché r, et l'on aura conséquemment

$$T=(A+B+C+D)\cdot\frac{r}{3}\ ;$$

d'où on tire

$$r=\frac{3T}{A+B+C+D}\ . \qquad (1)$$

Do est la diagonale d'un parallélipipède, dont les arêtes concourant en D sont égales à a', b', c' ; et dans lequel les distances entre les faces opposées sont toutes égales à r. En conséquence, les triangles-rectangles semblables donnent

$$a'=\frac{ar}{g}\ ,\quad b'=\frac{br}{h}\ ,\quad c'=\frac{cr}{k}\ . \qquad (2)$$

Voilà donc les coordonnées du centre déterminées. On sait d'ailleurs que

$$\text{Cos}.\alpha=\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc}\ ,\quad \text{Cos}.\beta=\frac{c^2+a^2-e^2}{2ca}\ ,\quad \text{Cos}.\gamma=\frac{a^2+b^2-f^2}{2ab}\ ;$$

$$T=\tfrac{1}{6}abc\sqrt{1-\text{Cos}.^2\alpha-\text{Cos}.^2\beta-\text{Cos}.^2\gamma+2\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma}\ ;$$

$$A=\tfrac{1}{2}bc\text{Sin}.\alpha\ ,\quad B=\tfrac{1}{2}ca\text{Sin}.\beta\ ,\quad C=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin}.\gamma\ ;$$

$$D=\tfrac{1}{4}\sqrt{2e^2f^2+2f^2d^2+2d^2e^2-d^4-e^4-f^4}\ ;$$

$$g=\frac{3T}{A}\ ,\quad h=\frac{3T}{B}\ ,\quad k=\frac{3T}{C}\ ;$$

au moyen de quoi r, a', b', c' peuvent, sans difficulté, être exprimés en fonction des six arêtes.

Les équations de Do sont

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}\ ,$$

ou

$$\frac{gx}{a}=\frac{hy}{b}=\frac{kz}{c}\ ,$$

ou

$$\frac{x}{Aa}=\frac{y}{Bb}=\frac{z}{Cc},$$

ou enfin

$$\frac{x}{\text{Sin.}\alpha}=\frac{y}{\text{Sin.}\beta}=\frac{z}{\text{Sin.}\gamma}. \qquad (3)$$

§. II.

Trouver le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre ?

Tout étant d'ailleurs comme ci-dessus, soient de plus O le centre et R le rayon de la sphère circonscrite ; en désignant par a'', b'', c'' les coordonnées du centre de cette sphère, respectivement parallèles aux arêtes a, b, c, son équation sera

$$\left.\begin{array}{l}(x-a'')^2+2(y-b'')(z-c'')\text{Cos.}\alpha\\+(y-b'')^2+2(z-c'')(x-a'')\text{Cos.}\beta\\+(z-c'')^2+2(x-a'')(y-b'')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}=R^2 ; \qquad (4)$$

Pour exprimer que cette sphère passe par les quatre sommets A, B, C, D, il faudra écrire que son équation est également satisfaite par chacun des quatre systèmes de valeurs

$$\begin{array}{l}x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\\x=a\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\\x=0\ ,\ y=b\ ,\ z=0\ ,\\x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=c\ .\end{array}$$

Cela donne

$$a''^2+b''^2+c''^2+2b''c''\text{Cos.}\alpha+2c''a''\text{Cos.}\beta+2a''b''\text{Cos.}\gamma=R^2, \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a-a'')^2+b''^2+c''^2+2b''c''\text{Cos.}\alpha-2c''(a-a'')\text{Cos.}\beta-2b''(a-a'')\text{Cos.}\gamma=R^2,\\a''^2+(b-b'')^2+c''^2-2c''(b-b'')\text{Cos.}\alpha+2c''a''\text{Cos.}\beta-2a''(b-b'')\text{Cos.}\gamma=R^2,\\a''^2+b''^2+(c-c'')^2-2b''(c-c'')\text{Cos.}\alpha-2a''(c-c'')\text{Cos.}\beta+2a''b''\text{Cos.}\gamma=R^2.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Retranchant l'équation (5) de chacune des équations (6), celles-ci deviendront, en divisant la première par a, la seconde par b et la troisième par c,

$$2a''+2c''\text{Cos.}\beta+2b''\text{Cos.}\gamma=a\ ,$$
$$2b''+2a''\text{Cos.}\gamma+2c''\text{Cos.}\alpha=b\ ,$$
$$2c''+2b''\text{Cos.}\alpha+2a''\text{Cos.}\beta=c\ .$$

En se rappelant que

$$1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}\beta^2-\text{Cos.}^2\gamma+2\,\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma=\frac{36T^2}{a^2b^2c^2}\ , \tag{7}$$

on en tire

$$a''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{a\text{Sin.}^2\alpha-b(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)-c(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\}\ ,$$

$$b''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{b\text{Sin.}^2\beta-c(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)-a(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\}\ ,$$

$$c''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{c\text{Sin.}^2\gamma-a(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)-b(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\}\ ,$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5), et ayant toujours égard à l'équation (7), il viendra

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{144T^2}\left\{\begin{array}{l} a^2\text{Sin.}^2\alpha-2bc(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\ +b^2\text{Sin.}^2\beta-2ca(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\ +c^2\text{Sin.}^2\gamma-2ab(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{array}\right\}. \tag{8}$$

§. III.

Trouver la distance entre les centres des sphères inscrite et circonscrite à un même tétraèdre ?

En représentant par D cette distance, et conservant d'ailleurs les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura

$$D^2=\left\{\begin{array}{l}(a'-a'')^2+2(b'-b'')(c'-c'')\text{Cos.}\alpha\\ +(b'-b'')^2+2(c'-c'')(a'-a'')\text{Cos.}\beta\\ +(c'-c'')^2+2(a'-a'')(b'-b'')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}\ ; \tag{9}$$

formule dans laquelle il n'est plus question que de substituer pour les coordonnées des deux centres les valeurs trouvées ci-dessus, et qui se simplifierait peut-être, en y introduisant les rayons R et r. (*)

(*) Il serait sur-tout intéressant de savoir si D peut être exprimé uniquement en fonction de R et r. J. D. G.