BÉRARD

Trigonométrie sphérique. Recherche de la relation entre les six arcs de grands cercles qui joignent, deux à deux, quatre points de la surface d'une sphère

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 253-255

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__253_0>

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Recherche de la relation entre les six arcs de grands cercles qui joignent, deux à deux, quatre points de la surface d'une sphère;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

M. Bret a donné, dans ce recueil (*), et MM. Français (**) et Carnot (***) avaient donné avant lui l'équation de relation entre les six arcs de grands cercles qui joignent, deux à deux, quatre points de la surface d'une sphère ou, ce qui revient au même, l'équation de relation entre les six angles que forment, deux à deux, quatre droites partant d'un même point et non situées dans un même plan. Je suis parvenu, de mon côté, à cette équation, par les considérations suivantes qui m'ont paru assez simples pour mériter d'être rendues publiques.

Soient OA, OB, OC, OD quatre droites indéfinies, partant d'un même point O, et ayant d'ailleurs des directions quelconques dans l'espace. Soient faits

(*) Tome V, page 334.

(**) Voyez la page 221 de ce volume.

(***) *Mémoire sur la relation entre cinq points dans l'espace*, page 35.

$$\text{Ang.BOC}=a\ ,\quad \text{Ang.DOA}=a'\ ,$$

$$\text{Ang.COA}=b\ ,\quad \text{Ang.DOB}=b'\ ,$$

$$\text{Ang.AOB}=c\ ,\quad \text{Ang.DOC}=c'\ .$$

Par OA , OB , OC prises deux à deux soient conduits trois plans. Soit prise sur OD une partie $OR=r$, et par le point R soient conduits trois nouveaux plans respectivement parallèles aux premiers ; ils formeront avec eux un parallélipipède dont r sera la diagonale; désignons par x , y , z respectivement, les arêtes de ce parallélipipède qui répondent à OA , OB , OC ; nous aurons ainsi

$$\text{Ang.}(y\ ,z)=a\ ,\quad \text{Ang.}(r\ ,x)=a'\ ;$$

$$\text{Ang.}(z\ ,x)=b\ ,\quad \text{Ang.}(r\ ,y)=b'\ ;$$

$$\text{Ang.}(x\ ,y)=c\ ;\quad \text{Ang.}(r\ ,z)=c'\ .$$

Or, il est connu que la projection d'une droite sur une autre est le produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur l'autre ; en considérant donc les divers quadrilatères gauches que forment les arêtes consécutives x, y, z avec la diagonale r, il viendra

$$r=x\text{Cos}.a'+y\text{Cos}.b'+z\text{Cos}.c'\ ; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=r\text{Cos}.a'-y\text{Cos}.c-z\text{Cos}.b\ , \\ y=r\text{Cos}.b'-z\text{Cos}.a-x\text{Cos}.c\ , \\ z=r\text{Cos}.c'-x\text{Cos}.b-y\text{Cos}.a\ . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Des trois dernières on tire

$$x=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2a\text{Cos.}a'-\text{Cos.}b'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)-\text{Cos.}c'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c},$$

$$y=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2b\text{Cos.}b'-\text{Cos.}c'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)-\text{Cos.}a'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c},$$

$$z=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2c\text{Cos.}c'-\text{Cos.}a'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)-\text{Cos.}b'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c};$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (1), divisant par r et chassant le dénominateur commun, on obtiendra

$$1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a\text{Cos.}^2a'-2\text{Cos.}b'\text{Cos.}c'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)\\+\text{Sin.}^2b\text{Cos.}^2b'-2\text{Cos.}c'\text{Cos.}a'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)\\+\text{Sin.}^2c\text{Cos.}^2c'-2\text{Cos.}a'\text{Cos.}b'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)\end{array}\right\};\quad(3)$$

qui est précisément la relation donnée par MM. Bret, Carnot et Français.