TÉDÉNAT

Trigonométrie. Sur l'aire du triangle sphérique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 46-48
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__46_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Sur l'aire du triangle sphérique ;

Par M. TÉDÉNAT, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

TOUT le monde connaît le beau théorème de Cavalleri, sur l'aire du triangle sphérique, et on le trouve démontré très-simplement dans la plupart des traités élémentaires ; mais les jeunes-gens qui étudient le calcul différentiel ne seront peut-être pas fâchés d'en trouver ici la démonstration suivante, fondée sur les principes de ce calcul.

Soient a, b, c (fig. 2) les trois côtés d'un triangle sphérique A, B, C les trois angles respectivement opposés, et S son aire.

Si le côté c et l'angle B restant fixes, l'angle A vient à croître de la quantité arbitraire i, de manière que le côté b devienne b', que AC devienne AC', et l'aire du triangle S' ; on aura, par la *Série de Taylor*,

$$S'=S+\frac{dS}{dA}\frac{i}{1}+\frac{d^2S}{dA^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots ,$$

$$b'=b+\frac{db}{dA}\frac{i}{1}+\frac{d^2b}{dA^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots=b+Mi .$$

Du sommet A comme pôle, soient décrits, entre les côtés de l'angle i, les arcs de parallèles Cm, $C'm'$, et des points C et m' soient abaissées sur le rayon OA de la sphère les perpendiculaires CD, $m'D'$; on pourra toujours prendre i assez petit, sans être nul, pour avoir

$$S'>S+C'Am' \quad \text{et} \quad S'<S+CAm\ ;$$

mais, en prenant le rayon de la sphère pour unité, et remarquant que AD, AD' sont respectivement les flèches des calotes dont les portions de fuseaux CAm et $C'Am'$ font partie, nous aurons

$$CAm=i(1-\text{Cos}.b)\ ,$$

$$C'Am'=i(1-\text{Cos}.b')=i\{1-\text{Cos}.b\text{Cos}.Mi+\text{Sin}\,b\text{Sin}.Mi\}\ ;$$

mais, on a d'ailleurs

$$\text{Cos}.Mi=1-\frac{M^2i^2}{1.2}+\ldots.\quad \text{Sin}.Mi=\frac{Mi}{1}-\frac{M^3i^3}{1.2.3}\ ;$$

d'où l'on voit qu'en substituant, $C'Am'$ prendra cette forme

$$C'Am'=i(1-\text{Cos}.b+Ni)\ .$$

Ainsi, en résumé, l'on aura

$$S'<S+(1-\text{Cos}.b)\frac{i}{1}\ ,$$

$$S'=S+\frac{dS}{dA}\frac{i}{1}+\frac{d^2S}{dA^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ ;$$

$$S'>S+(1-\text{Cos}.b)\frac{i}{1}+2N\frac{i^2}{1.2}+\ldots$$

d'où on conclura, par le *Théorème* d'Arbogast,

$$\frac{dS}{dA}=1-\text{Cos}.b. \qquad (1)$$

Présentement on a, par les formules connues

$$\text{Cos}.c=\frac{\text{Cos}\,C+\text{Cos}.A\text{Cos}\,B}{\text{Sin}\,.A\text{Sin}.B}\ ,$$

ce qui donne, à cause de B et c constans et de C fonction de A

$$\frac{dC}{dA}\text{Sin}.C\text{Sin}.A+(\text{Cos}.B+\text{Cos}.A\text{Cos}.C)=0\ .$$

Mais on a aussi

$$\text{Cos}.B+\text{Cos}.A\text{Cos}.C=\text{Sin}.A\text{Sin}.C\text{Cos}\,b\ ;$$

donc, en substituant et divisant par $\text{Sin}.C$,

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}A}+\mathrm{Cos}.b=0\ ; \qquad (2)$$

éliminant donc $\mathrm{Cos}.b$ entre cette équation et l'équation (1), il viendra

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}A+\mathrm{d}C\ ,$$

d'où, en intégrant,

$$S=A+C+Const.$$

Pour déterminer la constante, on remarquera que, si l'on a $A=\varpi$, on aura $C=B$ et $S=2B$; d'où

$$Const.=B-\varpi\ ,$$

et conséquemment

$$S=A+B+C-\varpi\ .$$

On aurait pu parvenir plus brièvement au but en employant le langage des infiniment petits. On aurait d'abord substitué $\mathrm{d}A$ à i ; on aurait remarqué que $\mathrm{d}S$, c'est-à-dire, le triangle sphérique CAC' étant infiniment petit, le triangle curviligne $CC'm$ était infiniment petit du second ordre ; qu'ainsi l'on pouvait poser simplement

$$\mathrm{d}S=CAm=\mathrm{d}A(1-\mathrm{Cos}.b)\ ;$$

mais, dans le petit triangle sphérique CAC' où l'angle C est le supplément du même angle de BAC, on a

$$\mathrm{Cos}.b=\frac{\mathrm{Cos}.C'-\mathrm{Cos}.\mathrm{d}A\mathrm{Cos}.C}{\mathrm{Sin}.\mathrm{d}A\mathrm{Sin}.C}\ .$$

Or, on a $\mathrm{Sin}.\mathrm{d}A=\mathrm{d}A$, $\mathrm{Cos}.\mathrm{d}A=1$, et $C'=C+\mathrm{d}C$ d'où $\mathrm{Cos}.C'$ $=\mathrm{Cos}.C\mathrm{Cos}.\mathrm{d}C-\mathrm{Sin}.C\mathrm{Sin}.\mathrm{d}C=\mathrm{Cos}.C-\mathrm{d}C\mathrm{Sin}.C$; donc enfin

$$\mathrm{Cos}.b=-\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}A}\ ,$$

ou, en substituant,

$$\mathrm{d}S=\mathrm{d}A+\mathrm{d}C\ ,$$

comme ci-dessus.