ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

De la division du cercle en portions de même périmètre ayant entre elles un rapport donné

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 57-59
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__57_1>

De la division du cercle en portions de même périmètre ayant entre elles un rapport donné;

Par M. Gergonne.

Dans le I.er volume de ce recueil, page 240, M. Lhuilier a donné une très-élégante et très-curieuse construction du problème où il s'agit de diviser un cercle en parties égales à la fois en contour et en surface.

Ce qu'on vient de lire m'a fait penser que la méthode de M. Lhuilier devait s'appliquer au problème plus général où il s'agit de partager un cercle en parties de même contour, ayant entre elles

---

(*) M. Tédenat observe qu'en divisant la hauteur du triangle à partir du sommet dans le rapport de n à m désignant par x le premier des deux segmens, par h la hauteur du triangle total, et enfin par y celle du triangle à retrancher, on a l'équation $y^2=hx$, qui appartient à la parabole et peut fournir une construction.

A la vérité, cette construction n'est point élémentaire, mais M. Tédenat remarque que son analogue est peut-être la plus simple qu'on puisse appliquer au second problème de géométrie de la page 328 du V.e volume, relatif à la pyramide; problème non susceptible de solution élémentaire et qui conduit à l'équation $y^3=h^2x$ de la première parabole cubique.

J. D. G.

des rapports donnés. Non seulement l'épreuve a justifié mon attente; mais j'ai vu que la construction pouvait être démontrée très-brièvement, sans rien emprunter de la théorie des suites dont les termes sont des puissances semblables des termes d'une progression par différences.

Soit en effet divisé le diamètre $2r$ d'un cercle (fig. 7) en deux segmens, proportionnels à m et n; en sorte que ces deux segmens soient

$$\frac{2mr}{m+n}\,, \qquad \frac{2nr}{m+n}\,;$$

sur ces deux segmens comme diamètres soient décrits, de part et d'autre du diamètre total $2r$, deux demi-circonférences dont les longueurs seront conséquemment

$$\frac{\varpi mr}{m+n}\,, \qquad \frac{\varpi nr}{m+n}\,;$$

leur somme sera ainsi ϖr; c'est-à-dire que, quel que soit le rapport de m à n, la courbe continue formée par les deux demi-circonférences intérieures et se terminant aux deux extrémités du diamètre $2r$ est constamment égale à la demi-circonférence extérieure.

Cette courbe et le diamètre $2r$ divisent le cercle extérieur en quatre segmens M, N, M', N'; et l'on a évidemment, par ce qui précède,

$$M=\tfrac{1}{2}\varpi\frac{m^2r^2}{(m+n)^2}\,,\quad M'=\tfrac{1}{2}\varpi r^2-N=\tfrac{1}{2}\varpi r^2-\tfrac{1}{2}\varpi\frac{n^2r^2}{(m+n)^2}\,,$$

$$N=\tfrac{1}{2}\varpi\frac{n^2r^2}{(m+n)^2}\,;\quad N'=\tfrac{1}{2}\varpi r^2-M=\tfrac{1}{2}\varpi r-\tfrac{1}{2}\varpi\frac{m^2r^2}{(m+n)^2}\,;$$

ou, en réduisant,

$$M'=\tfrac{1}{2}\varpi r^2 m\,.\,\frac{m+2n}{(m-n)^2}\,,$$

$$N'=\tfrac{1}{2}\varpi r^2 n\,.\,\frac{n+2m}{(m+n)^2}\,;$$

donc

$$M+M'=\varpi r^2\frac{m}{m+n}\,;\qquad N+N'=\varpi r^2\frac{n}{m+n}\,;$$

et par conséquent

$$\frac{M+M'}{N+N'}=\frac{m}{n}\,;$$

c'est-à-dire, que la courbe continue partage le cercle en deux segmens proportionnels aux segmens correspondans du diamètre.