ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BENJAMIN VALZ

Questions résolues. Essai de solution du problème d'astronomie proposé à la page 388 du VI.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 123-128

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__123_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Essai de solution du problème d'astronomie proposé à la page 388 *du VI.e volume des* Annales ;

Par M. Benjamin Valz.

PROBLÈME. *Faire aux heures du lever et du coucher d'un astre, calculées pour un point quelconque de la surface de la terre, les corrections nécessaires pour les rendre propres à un autre point de cette surface, peu distant de celui-là?*

Solution. Soient

Z la distance zénitale d'un astre ;

D sa déclinaison $\begin{cases}\text{boréale } +, \\ \text{australe } -;\end{cases}$

P la hauteur du pôle ou la latitude de $\begin{cases}\text{boréale } +; \\ \text{australe } -;\end{cases}$

H l'angle horaire $\begin{cases}\text{occidental } +, \\ \text{oriental } -.\end{cases}$

Dans le triangle sphérique formé par le pôle, le zénit et l'astre, on a, par les formules connues,

$$\text{Cos}.Z=\text{Sin}.D\text{Sin}.P+\text{Cos}.D\text{Cos}.P\text{Cos}.H\ ; \qquad (1)$$

d'où on tire

$$\text{Cos}.H=-\text{Tang}.D\text{Tang}.P+\frac{\text{Cos}.Z}{\text{Cos}.D\text{Cos}.P}\ . \qquad (2)$$

Pour connaître le changement que la variation de P peut occasioner dans la valeur de H, il faut différencier cette équation par rapport à ces quantités, considérées comme seules variables ; cela donne exactement

$$\mathrm{d}H=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{Sin}.H\mathrm{Cos}.^2P}\left\{\mathrm{Tang}.D-\frac{\mathrm{Cos}.Z\mathrm{Sin}.P}{\mathrm{Cos}.D}\right\};$$

mais, comme nous ne nous proposons de faire usage de cette formule que pour l'époque des levers ou des couchers apparens, époque pour laquelle Z étant très-peu différent de $90°$, $\mathrm{Cos}.Z$ doit très-peu différer de *zéro*, nous pouvons nous permettre de supprimer le second terme du binôme vis-à-vis du premier, et conséquemment d'écrire simplement

$$\mathrm{d}H=\frac{\mathrm{d}P\mathrm{Tang}.D}{\mathrm{Sin}.H\mathrm{Cos}.^2P}. \qquad (3)$$

Nous verrons bientôt, en effet, que cette suppression est tout-à-fait sans inconvénient sensible.

Pour simplifier l'expression, et s'éviter en même temps la peine de chercher la déclinaison, on peut y substituer pour $\mathrm{Tang}.D$ sa valeur déduite de l'équation (1), en y supposant $\mathrm{Cos}.Z$ tout-à-fait nul ; c'est-à-dire,

$$\mathrm{Tang}.D=-\frac{\mathrm{Cos}.H}{\mathrm{Tang}P}; \qquad (4)$$

il viendra ainsi

$$\mathrm{d}H=-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{Sin}.P\mathrm{Cos}.P\mathrm{Tang}.H}=-\frac{2\mathrm{d}P}{\mathrm{Sin}.2P\mathrm{Tang}.H}. \qquad (5)$$

Telle est donc la correction qu'il faudrait appliquer aux levers et couchers de l'annuaire d'un lieu, pour les rendre propres à un autre lieu peu distant de celui-là. Mais, quelque simple qu'en soit le calcul, on pourrait trouver pénible d'être obligé de l'effectuer chaque fois ; il convient donc d'en dresser une table, ayant pour argument la déclinaison ; mais la précédente formule n'est plus aussi commode pour cet objet. Il paraît que ce qu'il y a de plus simple

simple est de se servir des deux triangles rectilatères, c'est-à-dire, de négliger le dernier terme de la formule (2). On a alors les deux équations

$$\text{Cos.}H = -\text{Tang.}D\,\text{Tang.}P\ ,\quad \text{Cos.}H' = -\text{Tang.}D\,\text{Tang.}P'\ ; \qquad (6)$$

desquelles on tire, par l'élimination de D,

$$\text{Cos.}H' = \text{Cos.}H.\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P}\ ; \qquad (7)$$

formule de laquelle il est facile ensuite de conclure la correction $H'-H$, avec assez de facilité. Quant à l'altération que pourrait y occasioner le terme négligé, nous l'obtiendrons en différentiant l'équation (1), par rapport à H et Z, considérées comme seules variables ; il viendra ainsi

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}Z\,\text{Sin.}Z}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}P\,\text{Sin.}H}\ ;$$

ou plus simplement, parce que Z est fort approchant de 90° ;

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}Z}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}P\,\text{Sin.}H}\ .$$

On aura semblablement

$$\mathrm{d}H' = \frac{\mathrm{d}Z}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}P'\,\text{Sin.}H'}\ ;$$

et $\mathrm{d}H'-\mathrm{d}H$ sera l'erreur du résultat précédent.

Appliquons ces formules à l'horizon de Montpellier qui, par son éloignement de Paris, donne, pour la France, une des plus fortes réductions ; et nous verrons que ce que nous nous sommes permis de négliger influe bien peu sur la correction trouvée

P, pour Paris. . . . $=48^{\circ}.50'.14''$; Log.Tang. 0.05835

P', pour Montpellier $=43\ .36\ .16$; Log.Tang. 9.97883

$$\text{Log.}\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P} = 9.92048$$

$$\text{Cos.}H = -\text{Tang}D\,\text{Tang.}P\ ;$$

$$\text{Cos.}H' = \text{Cos.}H.\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P}\ ,$$

Tang.P. . . .	$=10{,}05835$		Tang.P.	$=10.05835$	
Tang.Décl.Sol.	$=9{,}63761$	$23°.28'$.	Tang.Décl.Lune	$=9.73927$	$28.°45'$
$-$Cos.H	$=9.69596$	$119°.46'$	$-$Cos.H	$=9.79762$	$128.°52$
$\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Taug.}P}$	$=9.92048$		$\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P}$	$=9.92048$	
$-$Cos.H'	$=9.61644$	114.25	$-$Cos.H'	$=9.71810$	121.30
	$H'-H=$	$5.°21'$		$H'-H=$	$7.°22'$
	$\frac{1}{15}=$	$0^h.21^m,4$		$\frac{1}{15}=$	$0^h.29^m,5$

$$dH = \frac{dZ}{\text{Cos.}D\text{Cos.}P\text{Sin.}H}\ ,\qquad dH' = \frac{dZ}{\text{Cos.}D\text{Cos.}P'\text{Sin.}H'}\ ;$$

dZ=(33′)=1.51851	1.51851	dz=$-$24′=1.38021	1,38021
C. Cos.D=0.03749	0.03749	C. Cos.D =0.05714	0.05714
C. Cos.P=0.18158	C. Cos.P'=0.14019	C. Cos.P =0.18158	C. Cos.P'=0.14019
C. Sin.H=0.06145	C. Sin.H'=0.04069	C. Sin.H =0.10868	C. Sin.H'=0.06923
dH=62′,95=1,79903	dH'=54′,56=1.73688	dH=-53′,41=1,72761	dH'=-44′,33=1,64677

$dH'-dH=-0°.8',40$ $\qquad$ $dH'-dH=+0°.9',08$

$\frac{1}{15}=-0^h.0^m,56$. $\qquad$ $\frac{1}{15}=+0^h.0^m,61$.

Pour le soleil, dZ est positif, et égal à la réfraction horizontale (33′) ; mais pour la lune ce terme devient négatif et égal à (24′), différence entre la réfraction et la parallaxe horizontale moyenne (57′). Nous avons choisi les plus grandes déclinaisons du soleil et de la lune, parce que les corrections sont alors les plus fortes ; et l'on voit que, même dans ce cas extrême, le terme négligé altère à peine les résultats d'une demi-minute de temps. Les annonces n'étant qu'à la minute, on peut se permettre cette négligence, ce qui abrègera considérablement les calculs. Il conviendrait cependant de tenir compte du terme négligé, si la déclinaison passait 30°. La formule pourrait même n'être plus suffisante, si la déclinaison approchait d'être égale au complément de la hauteur du pôle ; il faudrait, dans ce cas, recourir aux différences finies, si cela en valait la peine ; mais le calcul direct paraît alors plus court.

Il ne nous reste plus qu'à tenir compte du changement des parallaxes, et de celui en déclinaison et en ascension droite qui peuvent avoir lieu entre les deux couchers ou les deux levers. Il est aisé de s'assurer que les deux premiers donnent une différence absolument insensible. Le changement en déclinaison, même pour la lune, influerait à peine de 0',05 de temps, et est par conséquent tout-à-fait négligeable. Examinons celui de l'ascension droite. Soient L l'heure du coucher de la lune, dans l'annuaire, c la correction à y appliquer, et d la différence des méridiens terrestres $\left\{\begin{matrix}\text{orientale } +\\ \text{occidentale } -\end{matrix}\right\}$; on aura

$$L-\quad[(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})\text{ à l'époque } L]=H\ ,$$

$$L+c-[(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})\text{ à l'époque } (L+c-d)=H'\ ,$$

$$c=H'-H+\text{d}(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})(c-d)\ .$$

Ce qu'on pourrait faire de mieux, pour réduire ces formules en tables, serait d'employer le mouvement moyen de la lune rapporté à l'écliptique, en considérant ce cercle comme le plan moyen des mouvemens de cet astre, par rapport à l'équateur ; et de faire ensuite la réduction à ce dernier cercle. Pour l'effectuer, le triangle sphérique rectangle donne, en faisant $\varepsilon=$ obliquité de l'écliptique et $l=$ longitude, les deux équations

$$\text{Tang.}(\text{Asc.dr.})=\text{Cos.}\varepsilon\text{Tang.}l\ ,\quad \text{Cos.}l=\text{Cos.}(\text{Asc.dr.})\text{Cos.}D\ :$$

Différentiant la première et substituant ensuite la valeur de Cos.(Asc.dr.) prise dans la seconde, on aura

$$\text{d.}(\text{Asc.dr.})=\frac{\text{d}l.\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}^2(\text{Asc.dr.})}{\text{Cos.}^2l}=\frac{\text{d}l.\text{Cos.}\varepsilon}{\text{Cos.}^2D}\ .$$

Mais, comme la plus grance réduction altère à peine de $\frac{1}{11}$ les moyens mouvemens, on peut la négliger, et compter simplement ces derniers sur l'équateur. Nous aurons alors

$$\text{Moyen mouvement diurne}\left\{\begin{array}{ll}\text{de la lune} & =13^{\circ},176\\ \text{du soleil} & =\underline{0\ ,986}\end{array}\right.$$

Différence ou mouvement relatif de la lune $12^{\circ}.190$

Ce qui fait en une minute de temps $0',508$

$$\text{Donc}\qquad c=\mathrm{d}H+0',508\frac{c-d}{15}\ .$$

On voit aisément que les corrections ne seront pas les mêmes pour les déclinaisons australes et pour les déclinaisons boréales. A la vérité, la plus grande différence ne va qu'à *deux minutes* de temps.

Lorsqu'à l'aide de ces formules on aura formé la table des corrections, ayant pour argument la déclinaison, il sera commode de se servir de celle-là pour en dresser une inverse, ayant pour argument la correction même, à $0',5$; $1',5$; $2',5$; $3',5$;....; afin d'avoir la limite de la déclinaison en dessous ou en dessus de laquelle la correction devra être augmentée ou diminuée d'une unité.

Nismes, le 31 octobre 1816.