ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

Géométrie élémentaire. Théorèmes divers, sur le triangle et le tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 167-173

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__167_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorèmes divers, sur le triangle et le tétraèdre;

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

Théorème I. Dans tout tronc de triangle, à bases parallèles, l'intersection des deux diagonales est en ligne droite avec les milieux des bases du tronc et le sommet du triangle.

Démonstration. Soit pris l'angle du sommet pour angle des coordonnées. Si a et b désignent les segmens interceptés sur les axes, depuis l'origine, par l'une quelconque des deux bases du tronc, les segmens interceptés sur les mêmes axes, aussi à partir de l'origine, par son autre base, pourront être représentés par na et nb; n étant un nombre abstrait quelconque.

Les deux diagonales auront ainsi pour leurs équations

$$ay=nb(a-x)\ , \qquad bx=na(b-y)\ ,$$

d'où l'on conclura encore, par l'élimination de n,

$$ay=bx\ ;$$

équation d'une droite qui doit contenir le point d'intersection des deux diagonales; mais cette droite passe évidemment par l'origine et par les milieux des deux bases du tronc; le théorème est donc complètement démontré.

Remarque. Dans le cas particulier où $n=2$ ou $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, lorsque la hauteur du tronc est moitié de celle du triangle, l'intersection des deux diagonales est évidemment le centre de gravité de l'aire du triangle total.

THÉORÈME II. Dans tout tronc de tétraèdre, à bases parallèles, les droites qui joignent les sommets de l'une quelconque des bases aux milieux des côtés de l'autre base qui leur sont respectivement opposés, concourent en un même point qui est en ligne droite avec les centres de gravité des aires des bases du tronc et avec le sommet du tétraèdre.

Démonstration. Soient prises les trois arêtes du sommet du tétraèdre pour axes des coordonnées. Si a, b, c désignent les segmens interceptés sur ces axes, depuis l'origine, par l'une des bases du tronc, les segmens interceptés sur les mêmes axes, aussi à partir de l'origine, par l'autre base de ce tronc, pourront être représentés par na, nb, nc; n étant un nombre abstrait quelconque. Il est de plus aisé de voir que les centres de gravité des aires des deux bases auront respectivement pour équations

$$x=\tfrac{1}{3}a\,,\quad x=\tfrac{1}{3}na\,;$$

$$y=\tfrac{1}{3}b\,,\quad y=\tfrac{1}{3}nb\,,$$

$$z=\tfrac{1}{3}c\,,\quad z=\tfrac{1}{3}nc\,;$$

Lesquelles satisfont également à la double équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\,, \qquad (1)$$

qui est conséquemment celle de la droite qui joint le sommet ou l'origine aux centres de gravité des aires des deux bases.

Cela posé, les équations des droites qui joindront les sommets de la première base aux milieux des côtés opposés de la seconde, seront, comme il est aisé de le trouver,

$$2cx=na(c-z)\ ,\quad 2cy=nb(c-z)\ ,$$

$$2ay=nb(a-x)\ ;\quad 2az=nc(a-x)\ ;$$

$$2bz=nc(b-y)\ ,\quad 2bx=na(b-y)\ .$$

Quant aux droites qui joignent, au contraire, les sommets de la seconde base aux milieux des côtés opposés de la première, elles auront respectivement pour équations

$$2ncx=a(nc-z)\ ,\quad 2ncy=b(nc-z)\ ,$$

$$2nay=b(na-x)\ ,\quad 2naz=c(na-x)\ ;$$

$$2nbz=c(nb-y)\ ,\quad 2nbx=a(nb-y)\ .$$

De trois équations prises au hazard dans le premier groupe, on tire

$$x=\frac{na}{n+2}\ ;\qquad y=\frac{nb}{n+2}\ ,\qquad z=\frac{nc}{n+2}\ ;\qquad (2)$$

résultats dont la symétrie prouve qu'ils doivent également satisfaire aux trois autres équations, ainsi qu'on peut directement s'en assurer; et que, par conséquent, ils expriment les coordonnées d'un point commun à nos trois premières droites.

Pareillement, trois équations prises au hasard dans le second groupe, donnent

$$x=\frac{na}{2n+1}\ ,\quad y=\frac{nb}{2n+1}\ ;\quad z=\frac{nc}{2n+1}\ ;\qquad (3)$$

résultats dont la symétrie prouve encore, comme il est d'ailleurs facile de le vérifier, qu'ils doivent également satisfaire aux trois autres équations, et qu'ainsi ils expriment les coordonnées d'un point commun à nos trois dernières droites.

Nos trois premières droites se coupent donc en un même point (2), et les trois dernières en un autre point (3). Il est de plus aisé de voir que le point (2) comme le point (3) est sur la droite (1); ainsi le théorème est complètement démontré.

Remarque. Il est aisé de voir qu'en supposant, dans les équations (3), $n=\frac{1}{2}$, elles deviennent celles du centre de gravité du volume de tétraèdre; et, comme on a alors

$$x=\tfrac{1}{4}a\ ,\quad y=\tfrac{1}{4}b\ ,\quad z=\tfrac{1}{4}c\ ,$$

il s'ensuit que ce point est situé au milieu de la dooite qui joint les milieux des deux arêtes opposées quelconques. C'est aussi ce qui a été démontré, d'une autre manière, par M. Monge, dans la *Correspondance sur l'école polytechnique*, (tom. II, pag. 1).

Si l'on fait une projection de notre tétraèdre sur un plan quelconque, les projections des milieux des arêtes et des centres de gravité des aires des faces seront les milieux et les centres de gravité des projections de ces arêtes et de ces faces; et les projections des points en ligne droite seront situées sur les projections de ces droites. On peut donc, de notre théorème, déduire comme corollaire la proposition suivante.

Corollaire. Lorsque deux triangles, tracés sur un même plan, ont les côtés parallèles, chacun à chacun, les droites qui joignent les sommets de l'un d'eux aux milieux des côtés respectivement opposés dans l'autre, se coupent en un même point situé en ligne droite avec les centres de gravité des aires de ces triangles et leur centre de similitude.

THÉORÈME III. Si trois droites partant des sommets d'un triangle concourent en un même point, leurs parallèles respectives partant des milieux des côtés opposés concourront aussi en un même point, et réciproquement. En outre, la droite qui joindra ces deux points contiendra le centre de gravité de l'aire du triangle, lequel la divisera en deux parties dont l'une sera double de l'autre.

Démonstration. Soient A, B, C les trois sommets du triangle,

a, b, c les milieux des côtés opposés, et G son centre de gravité. a, b, c seront les sommets d'un triangle semblable à ABC, dont les côtés, moitié des siens, leur seront respectivement parallèles. Il est de plus aisé de voir que G sera le centre commun de gravité des aires de ces deux triangles, et conséquemment leur centre de similitude.

Soit P un point situé d'une manière quelconque sur le plan du triangle ABC, et soit p son homologue par rapport au triangle abc; ces deux points devront être en ligne droite avec le centre de similitude G; et, comme on a $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CA}{ca}=2$, on devra avoir également $\frac{GP}{Gp}=2$. Enfin, les points P et p étant des points homologues; et les deux triangles ayant leurs côtés parallèles, chacun à chacun, les droites PA, PB, PC doivent être respectivement parallèles aux droites pa, pb, pc; ce qui complète la démonstration de notre théorème.

Remarque. Quoique nous ayons tacitement supposé, dans le raisonnement que nous venons de faire, que les points P et p étaient tous deux dans le plan du triangle; il est aisé de voir que ce raisonnement n'en serait pas moins concluant, quand bien même ces points seraient situés hors de ce plan. Dans ce cas, ils se trouveraient situés de différens côtés du plan du triangle.

Si le point p est le centre du cercle inscrit, le point P deviendra le point d'intersection des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur les directions des côtés opposés. On peut donc de notre théorème conclure comme corollaire la proposition suivante :

Corollaire. Dans tout triangle, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, situé en ligne droite avec le centre du cercle inscrit, et le centre de gravité de l'aire du triangle. Ce dernier point est au tiers de la droite qui joint les deux autres à partir du second.

Cette dernière proposition a été démontrée pour la première fois par M. Le Français, dans son *Application de l'algèbre à la géométrie.* On voit avec quelle simplicité elle se déduit de notre théorie.

THÉORÈME IV. Si quatre droites partant des sommets d'un tétraèdre concourent en un même point de l'espace, leurs parallèles respectives, partant des centres de gravité des aires des faces opposées concourront aussi en un même point, et réciproquement. En outre, la droite qui joindra ces deux points contiendra aussi le centre de gravité du volume du tétraèdre, lequel la divisera en deux parties dont l'une sera quadruple de l'autre.

Démonstration. Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre, a, b, c, d les centres de gravité des aires des faces opposées, et G le centre de gravité du volume de ce tétraèdre. a, b, c, d seront les sommets d'un tétraèdre semblable à $ABCD$, dont les arêtes, quatre fois moindre que les siennes, leur seront respectivement parallèles. Il est de plus aisé de voir que G sera le centre commun de gravité des volumes de ces deux tétraèdres, et conséquemment leur centre de similitude.

Soit P un point de l'espace situé d'une manière quelconque par rapport au premier tétraèdre, et soit p son homologue par rapport au second ; ces deux points devront être en ligne droite avec le centre de similitude G; et, comme on a $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc}=\frac{AD}{ad}=\frac{BD}{bd}=\frac{ED}{ed}=4$, on devra avoir aussi $\frac{PG}{pG}=4$. Enfin, les points P et p étant des points homologues et les deux tétraèdres ayant les arêtes parallèles, chacune à chacune, les droites PA, PB, PC, PD devront être respectivement parallèles à leurs homologues pa, pb, pc, pd ; ce qui complète la démonstration de notre théorème.

Remarque. Il a été démontré (tom. II, pag. 141 et 143) que, dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont respectivement perpendiculaires, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les plans des faces, ainsi que les perpendiculaires élevées aux plans de de ces faces, par les centres de gravités de leurs aires, se coupaient toutes quatre au même point ; et l'on voit qu'en vertu de notre théorème, chacune de ces deux propositions est une conséquence nécessaire de l'autre. Le même theorème fait voir en outre que la droite qui joint ces deux points contient le centre de gravité du volume du tétraèdre, et que ce point la partage en deux parties dont l'une est quadruple de l'autre.

Si l'on projette le tetraèdre sur un plan quelconque, sa projection sera un quadrilatère avec ses deux diagonales ; les projections des centres de gravité des aires de ses faces seront les centres de gravité des aires de leurs projections ; les projections des droites concourrant en un même point, concourront aussi en un même point ; et les projections des droites parallèles le seront elles-mêmes. Notre théorème donne donc lieu au corollaire suivant.

Corollaire. Si quatre droites partant des sommets d'un quadrilatère concourent en un même point, leurs parallèles partant respectivement, pour chaque sommet, du centre de gravité de l'aire du triangle formé par les trois autres, concourront aussi en un même point ; et réciproquement (*).

(*) On peut consulter, pour les autres analogies entre le triangle et le tétraèdre, la page 133 du deuxième volume et la page 317 du troisième volume de ce recueil.

J. D. G.