ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie. Caractères des surfaces de révolution, en général et en particulier, de celles du second ordre, dans le cas des coordonnées obliques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 174-183
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__174_0>

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

Caractères des surfaces de révolution, en général et en particulier, de celles du second ordre, dans le cas des coordonnées obliques;

Par M. ***.

On trouve, dans le troisième volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (pag. 196, 203, 205, 313), diverses méthodes pour parvenir aux conditions qui expriment que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, appartient à une surface de révolution, du moins en supposant que ces indéterminées expriment des coordonnées rectangulaires.

Dans le troisième volume du présent recueil (pag. 111), M. Bérard a indiqué ce qu'il faudrait faire pour étendre cette recherche au cas où la surface proposée se trouve rapportée à des axes obliques quelconques. En substituant en effet, pour a, b, c, d, dans son équation

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0\ ,$$

les coefficiens de son équation (4) (pag. 110), le premier membre de l'équation résultante doit devenir la somme de trois quarrés; et, en égalant séparément la racine de chacun d'eux à zéro, on doit parvenir à trois équations de condition, telles que chacune d'elles se trouve comportée par les deux autres. Malheureusement, outre que cette manière de parvenir aux conditions cherchées, qui suppose d'ailleurs la connaissance préalable de l'équation (4), est assez laborieuse, il n'est point commode d'en déduire les équations de l'axe de révolution (*).

(*) Ces inconvéniens n'ont point échappé à M. Bérard ; car, dans un mémoire inédit qu'il m'a communiqué, au commencement de 1816, il présente cette recherche sous un point de vue un peu différent. Voici, en dernière analise, à quoi son procédé se réduit.

En supposant, pour plus de simplicité, la surface rapportée à son centre, ce qui ne change rien au fond de la recherche dont il s'agit, et en représentant son équation par

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=E\ ; \tag{1}$$

il a été démontré (tom. VI, pag. 168) que

$$x=mz\ ,\quad y=nz\ , \tag{2}$$

étant les équations d'un diamètre principal, on devait avoir

$$\left.\begin{aligned}(Ar^2-E)m+(B'r^2-E\mathrm{Cos}.\beta)\ +(C'r^2-E\mathrm{Cos}.\gamma)n&=0\ ,\\(Br^2-E)n\ +(C'r^2-E\mathrm{Cos}.\gamma)m+(A'r^2-E\mathrm{Cos}.\alpha)\ &=0\ ,\\(Cr^2-E)\ \ +(A'r^2-E\mathrm{Cos}.\alpha)n+(B'r^2-E\mathrm{Cos}.\beta)m&=0\ ;\end{aligned}\right\}\ (3)$$

équations dans lesquelles r exprime la longueur de la moitié du diamètre. Si on élimine r^2 entre elles, ce qui conduira à deux équations de la forme

$$\left.\begin{aligned}a\,m^2+b\,mn+c\,n^2+d\,m+e\,n+f&=0\ ,\\a'm^2+b'mn+c'n^2+d'm+e'n+f'&=0\ ,\end{aligned}\right\}\ (4)$$

et qu'on élimine ensuite n entre ces deux-ci, on obtiendra une équation finale

On a lieu d'être surpris qu'aucun des géomètres qui se sont occupés de cette question, n'ait songé à y appliquer la transformation des coordonnées qui, comme on va le voir, dans le cas même des coordonnées obliques, conduit au but d'une manière

---

en m qui sera du troisième degré seulement et qui répondra aux trois directions qu'un diamètre principal peut avoir.

Si la surface est de révolution, l'une de ces directions doit être celle de l'axe, et les deux autres doivent demeurer indéterminées ; il faut donc alors que cette équation du 3.^{e} degré s'anéantisse d'elle-même, c'est-à-dire, que ces quatre coefficiens doivent être égalés à zéro.

Mais les quatre équations de relation qu'on obtient ainsi peuvent être remplacées avec avantage par deux autres seulement. Pour obtenir celles-ci, on remarquera que, dans le cas dont il s'agit, pour que les équations (4) ne conduisent qu'à un seul système de valeurs de m et n, il faut qu'elles admettent un facteur commun, fonction du premier degré de ces deux quantités. Posant donc

$$m^2+\frac{b}{a}mn+\frac{c}{a}n^2+\frac{d}{a}m+\frac{e}{a}n+\frac{f}{a}=(m+pn+q)(m+\alpha n+\beta)\ ,$$

$$m^2+\frac{b'}{a'}mn+\frac{c'}{a'}n^2+\frac{d'}{a'}m+\frac{e'}{a'}n+\frac{f'}{a'}=(m+pn+q)(m+\alpha' n+\beta')\ ;$$

et exprimant séparément que chacune de ces équations est identique, on aura, d'une part, cinq équations entre p, q, α, β, et d'une autre, cinq équations entre p, q, α', β' ; faisant donc, de part et d'autre, l'élimination de ces quatre inconnues, on obtiendra les deux équations de condition cherchées.

Le calcul nécessaire pour effectuer cette élimination conduira aux valeurs de α, β, α', β'. Résolvant alors les deux équations

$$m+\alpha n+\beta=0\ ,\quad m+\alpha' n+\beta'=0\ ,$$

elles feront connaître les valeurs de m et n qui conviennent à l'axe de révolution.

Tout cela est très-exact ; mais nous pensons que le procédé que l'on va exposer pourra peut-être paraître un peu plus simple et plus symétrique.

J. D. G.

extrêmement simple, ne présuppose aucune recherche préalable, n'exige que des calculs d'une symètrie parfaite, et a sur-tout le précieux avantage de pouvoir être indistinctement appliquée aux surfaces de tous les degrés.

Pour plus de simplicité, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que la surface est déjà rapportée à son centre. Le fait prouvera que cette supposition n'ôte absolument rien à la généralité des résultats. En conséquence, nous donnerons à l'équation de cette surface la forme suivante :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=E\ ; \qquad (1)$$

et les angles des coordonnées seront supposés α, β, γ.

Soient t, u, v les coordonnées d'un système rectangulaire de même origine que le premier. On sait qu'en posant

$$\left.\begin{array}{l} t=a\ x+b\ y+c\ z\ , \\ u=a'\ x+b'y+c'\ z\ , \\ v=a''x+b''y+c''z\ , \end{array}\right\}\ (2)$$

on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} a^2+a'^2+a''^2=1\ , \\ b^2+b'^2+b''^2=1\ , \\ c^2+c'^2+c''^2=1\ ; \end{array}\right\}\ (3) \qquad \left.\begin{array}{l} bc+b'c'+b''c''=\mathrm{Cos.}\alpha \\ ca+c'a'+c''a''=\mathrm{Cos.}\beta \\ ab+a'b'+a''b''=\mathrm{Cos.}\gamma \end{array}\right\}\ (4)$$

Cela posé; lorsque la surface est de révolution, on peut la supposer d'abord rapportée aux coordonnées rectangulaires ; et, en admettant que l'axe des v est l'axe de révolution, son équation sera de la forme

$$t^2+u^2=Mv^2+N \text{ (*)} \qquad (5)$$

M et N étant deux constantes dont les grandeurs et les signes particularisent la surface.

Passant ensuite aux coordonnées obliques, cette équation deviendra

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2=M(a''x+b''y+c''z)^2+N\ ;$$

ou, en developpant, ordonnant et ayant égard aux relations (3, 4),

$$\left.\begin{array}{l}\{1-(1+M)a''^2\}x^2+\{\text{Cos}.\alpha-(1+M)b''c''\}yz \\ +\{1-(1+M)b''^2\}y^2+\{\text{Cos}\,\beta-(1+M)c''a''\}zx \\ +\{1-(1+M)c''^2\}z^2+\{\text{Cos}.\gamma-(1+M)a''b''\}xy\end{array}\right\}=N. \qquad (6)$$

Cette équation ne devra donc différer de l'equation (1) que par le facteur $\frac{N}{E}$. Exprimant donc qu'il est ainsi, nous aurons les six équations

$$E\{1-(1+M)a''^2\}=AN\ , \quad E\{\text{Cos}.\alpha-(1+M)b''c''\}=A'N,$$

$$E\{1-(1+M)b''^2\}=BN\ , \quad E\{\text{Cos}.\beta-(1+M)c''a''\}=B'N,$$

$$E\{1-(1+M)c''^2\}=CN\ ; \quad E\{\text{Cos}.\gamma-(1+M)a''b''\}=C'N.$$

En y faisant

(*) En général, v étant l'axe de révolution, l'équation d'une surface quelconque de révolution est de la forme

$$t^2+u^2=f(v)\ ;$$

mais ici où la surface est du second ordre et a son centre à l'origine, on doit avoir $f(v)=Mv^2+N$; M et N étant deux constantes.

(*Note de l'auteur.*)

$$a''\sqrt{1+M}=d\,,\quad b''\sqrt{1+M}=e\,,\quad c''\sqrt{1+M}=f\,,\quad N=-kE\,,$$

on pourra les écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} d^2&=Ak+1\,,\\ e^2&=Bk+1\,,\\ f^2&=Ck+1\,,\end{aligned}\right\}(6)\qquad \left.\begin{aligned} ef&=A'k+\mathrm{Cos.}\alpha\,,\\ fd&=B'k+\mathrm{Cos.}\beta\,,\\ de&=C'k+\mathrm{Cos.}\gamma\,.\end{aligned}\right\}(7)$$

Ces équations ne renferment plus que les *quatre* inconnues d, e, f, k. Puis donc qu'elles sont au nombre de *six*, l'élimination de ces inconnues entre elles conduira aux deux équations de condition cherchée.

Il faudra ensuite obtenir les équations de l'axe de révolution. Ces équations, dans le système rectangulaire, étant $t=0$, $u=0$, seront dans le système oblique

$$a\,x+b\,y+c\,z=0\,,$$

$$a'x+b'y+c'z=0\,.$$

Prenant successivement les sommes de leurs produits par a et a', b et b', c et c', et ayant égard aux relations (3, 4), on en déduira trois nouvelles, dont chacune se trouvera comportée par les deux autres, et qui pourront être écrites ainsi

$$x+y\mathrm{Cos.}\gamma+z\mathrm{Cos.}\beta=a''(a''x+b''y+c''z)\,,$$

$$y+z\mathrm{Cos.}\alpha+x\mathrm{Cos.}\gamma=b''(a''x+b''y+c''z)\,,$$

$$z+x\mathrm{Cos.}\beta+y\mathrm{Cos.}\alpha=c''(a''x+b''y+c''z)\,,$$

et desquelles on déduira, par l'élimination du facteur commun à leurs seconds membres,

$$\frac{x+y\text{Cos}\,\alpha+z\text{Cos.}\beta}{a''}=\frac{y+z\text{Cos}\,\alpha+x\text{Cos}\,\gamma}{b''}=\frac{z+x\text{Cos.}\beta+y\text{Cos}\,\alpha}{c''}\;;$$

ou encore, en divisant par $\sqrt{1+M}$,

$$\frac{x+y\text{Cos}\,\gamma+z\text{Cos}\,\beta}{d}=\frac{y+z\text{Cos.}\alpha+x\text{Cos.}\gamma}{e}=\frac{z+x\text{Cos}\,\beta+y\,\text{Cos.}\alpha}{f}\;;\qquad(8)$$

équations dans lesquelles il ne s'agira plus que de mettre pour d, e, f, les valeurs données par les équations (6, 7).

Tous les calculs que nous venons d'indiquer, toujours, comme on le voit, d'une parfaite symetrie, n'exigent, en quelque sorte, pour leur execution, que la simple peine d'ecrire. Et d'abord, en comparant aux quarres des équations (7) les produits deux à deux des équations (6), on obtient

$$(A'k+\text{Cos}\,\alpha)^2-(Bk+1)(Ck+1)=0\;,$$

$$(B'k+\text{Cos.}\beta)^2-(Ck+1)(Ak+1)=0\;,$$

$$(C'k+\text{Cos.}\gamma)^2-(Ak+1)(Bk+1)=0\;;$$

ou, en developpant et ordonnant

$$\left.\begin{array}{l}(A'^2-BC)k^2-(B+C-2A'\text{Cos.}\alpha)k-\text{Sin.}^2\alpha=0\;,\\(B'^2-CA)k^2-(C+A-2B'\text{Cos.}\beta)k-\text{Sin.}^2\beta=0\;,\\(C'^2-AB)k^2-(A+B-2C'\text{Cos.}\gamma)k-\text{Sin.}^2\gamma=0\;.\end{array}\right\}\;(9)$$

En éliminant k entre ces équations, prises successivement deux à deux, on obtiendra trois équations de condition dont chacune sera comportée par les deux autres; et ce sera les équations demandées. En posant, pour abréger,

A'^2

$$A'^2-BC=a\ ,\quad B+C-2A'\text{Cos.}\alpha=a'\ ;$$

$$B'^2-CA=b\ ,\quad C+A-2B'\text{Cos.}\beta=b'\ ;$$

$$C'^2-AB=c\ ,\quad A+B-2C'\text{Cos.}\gamma=c'\ ;$$

on trouvera d'abord

$$k=\frac{a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha}{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}=-\frac{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}{ab'-ba'}\ ;$$

$$k=\frac{b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta}{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}=-\frac{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}{bc'-cb'}\ ,$$

$$k=\frac{c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma}{c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}=-\frac{c\text{Sin.}\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}{ca'-ac'}\ .$$

Voilà donc la valeur de k sous six formes différentes ; et nous avons en outre les trois équations de condition

$$(a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha)^2+(ab'-ba')(a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha)=0\ ,$$

$$(b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta)^2+(bc'-cb')(b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta)=0\ ,$$

$$(c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma)^2+(ca'-ac')(c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma)=0\ .$$

Nous aurons encore

$$d=\sqrt{A.\frac{b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta}{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}}\ ,\quad e=\sqrt{B.\frac{c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma}{c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}}\ ,$$

$$f=\sqrt{C.\frac{a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha}{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}}\ ;$$

ce qui donnera pour la double équation de l'axe de révolution

$$(x+y\text{Cos.}\gamma+z\text{Cos.}\beta)\sqrt{\frac{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}{A(b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}\beta)}}=$$

$$(y+z\mathrm{Cos.}\alpha+x\mathrm{Cos.}\gamma)\sqrt{\frac{c\mathrm{Sin.}^2\alpha-a\mathrm{Sin.}^2\gamma}{B(c'\mathrm{Sin.}^2\alpha-a'\mathrm{Sin.}^2\gamma)}}=$$

$$(z+x\mathrm{Cos.}\beta+y\mathrm{Cos.}\alpha)\sqrt{\frac{a\mathrm{Sin.}^2\beta-b\mathrm{Sin.}^2\alpha}{C(a'\mathrm{Sin.}^2\beta-b'\mathrm{Sin.}^2\alpha)}}\ .$$

En combinant entre elles d'une manière convenable les équations de condition, on pourrait sans doute les remplacer par d'autres d'une forme plus simple, et qui permettraient de présenter ces derniers résultats sous une forme entièrement rationnelle.

Lorsque les coordonnées primitives sont rectangulaires, le calcul s'abrège d'une manière notable; on a alors

$$\mathrm{Sin.}\alpha=\mathrm{Sin.}\beta=\mathrm{Sin.}\gamma=1\ ;$$

$$\mathrm{Cos.}\alpha=\mathrm{Cos.}\beta=\mathrm{Cos.}\gamma=0\ .$$

En conséquence, les équations (7) deviennent simplement

$$ef=A'k\ ,\quad fd=B'k\ ,\quad de=C'k\ .$$

En divisant successivement par chacune d'elles le produit des deux autres, il vient

$$d^2=-\frac{B'C'}{A'}k\ ,\quad e^2=-\frac{C'A'}{B'}k\ ,\quad f^2=-\frac{A'B'}{C'}\ ; \qquad (10)$$

valeurs qui, égalées à celles qui résultent des équations (6) donnent

$$(AA'-B'C')k=A'\ ,\quad (BB'-C'A')k=B'\ ,\quad (CC'-A'B')k=C'\ ;$$

d'où, par l'élimination de k,

$$\frac{AA'-B'C'}{A'}=\frac{BB'-C'A'}{B'}=\frac{CC'-A'B'}{C}\ ;$$

et telles seront les équations de condition.

On aura ensuite, par les équations (10)

$$A'^2d^2=B'^2e^2=c'^2f^2=-A'B'C'k\ ,$$

d'où

$$A'd=B'e=C'f\ ;$$

mais, dans le cas actuel, les équations (8), qui déterminent la direction de l'axe de révolution, sont

$$\frac{x}{d}=\frac{y}{e}=\frac{z}{f}\ ;$$

elles deviendront donc, d'après cela,

$$A'x=B'y=C'z\ ;$$

résultats conformes à ceux qu'on rencontre aux endroits cités au commencement de cet article.