ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 348 de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 183-187

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__183_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 348 de ce recueil ;

Par M. J. B. Durrande.

Les théorèmes dont il s'agit ici reviennent, en dernière analise, aux deux suivans :

THÉORÈME I. Soient AB , A′B′ , A″B″ *trois droites parallèles quelconques, tracées sur un même plan. Soit* C *le point de concours de* A′A″ *et* B′B″ ; *soit* C′ *le point de concours de* A″A *et* $B''B$ *; soit enfin* C'' *le point de concours de* AA' *et* BB' ; *les trois points* C , C' , C'' *seront en ligne droite.*

THÉORÈME II. Soient ASB , $A'S'B'$, $A''S''B''$ *trois angles ayant les côtés respectivement parallèles, tracés sur un même plan. Soient* M *le point de concours de* $S'A'$ *et* $S''B''$, *et* N *le point de concours de* $S'B'$ *et* $S''A''$; *soient* M' *le point de concours de* $S''A''$ *et* SB, *et* N' *le point de concours de* $S''B''$ *et* SA ; *soient enfin* M'' *le point de concours de* SA *et* $S'B'$, *et* N'' *le point de concours de* SB *et* $S'A'$; *les trois droites* MN, $M'N'$, $M''N''$ *concoûrront en un même point.*

C'est sous ce point de vue que nous allons envisager ces deux théorèmes.

I. Soit pris l'axe des x parallèle aux trois droites AB , $A'B'$, $A''B''$, et soient l'origine et la direction de l'axe des y supposés quelconques. Soient les équations des extrémités de nos trois droites ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour } A \left\{\begin{array}{l} x=a\,, \\ y=b\,; \end{array}\right. \quad \text{Pour } A' \left\{\begin{array}{l} x=a'\,, \\ y=b'\,; \end{array}\right. \quad \text{Pour } A'' \left\{\begin{array}{l} x=a''\,; \\ y=b''\,; \end{array}\right.$$

$$\text{Pour } B \left\{\begin{array}{l} x=a+l\,, \\ y=b\,; \end{array}\right. \quad \text{Pour } B' \left\{\begin{array}{l} x=a'+l'\,, \\ y=b'\,; \end{array}\right. \quad \text{Pour } B'' \left\{\begin{array}{l} x=a''+l''\,; \\ y=b''\,. \end{array}\right.$$

On aura donc pour les équations

$$\text{De } AA'\,, \qquad y-b=\frac{b-b'}{a-a'}(x-a)\,;$$

$$\text{De } BB'\,, \qquad y-b=\frac{b-b'}{(a-a')+(l-l')}(x-a-l)\,;$$

d'où l'on conclura, pour le point C'' de concours de ces deux droites ;

$$x=\frac{a'l-al'}{l-l'}\,, \qquad y=\frac{b'l-bl'}{l-l'}\,;$$

Par une simple permutation d'accens, on trouvera pour le point C de concours de A'A'' et B'B''

$$x=\frac{a''l'-a'l''}{l'-l''}\,; \qquad y=\frac{b''l'-b'l''}{l'-l''}\,;$$

et pour le point C' de concours de A''A et B''B

$$x=\frac{al''-a''l}{l''-l}\,, \qquad y=\frac{bl''-b''l}{l''-l}\,.$$

Or, puisque l'axe des y est quelconque, on peut toujours supposer qu'on la fait passer par C et C'; on devra avoir alors

$$\frac{a''l'-a'l''}{l'-l''}=0\,, \qquad \frac{al''-a''l}{l''-l}=0\,;$$

ou plus simplement

$$a''l'=a'l''\,; \qquad al''=a''l\,;$$

d'où encore

$$a'l=al'\,;$$

et par conséquent

$$\frac{a'l-al'}{l-l'}=0\,;$$

le point C'' sera donc aussi alors sur l'axe des y; ce point est donc en ligne droite avec les deux autres.

II. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux côtés des trois angles ASB, A'S'B', A''S''B'', l'origine étant d'ailleurs quelconque.

Soient alors les équations des sommets S , S′ , S″ ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour S}\left\{\begin{array}{l}x=a\,,\\ y=b\,;\end{array}\right.\quad \text{Pour S}'\left\{\begin{array}{l}x=a'\,,\\ y=b'\,;\end{array}\right.\quad \text{Pour S}''\left\{\begin{array}{l}x=a''\,;\\ y=b''\,.\end{array}\right.$$

En conséquence, les équations du point M″, intersection de SA et S′B′ et du point N″, intersection de SB et S′A′, seront

$$\text{Pour M}''\left\{\begin{array}{l}x=a'\,,\\ y=b\,;\end{array}\right.\quad \text{Pour N}''\left\{\begin{array}{l}x=a\,,\\ y=b'\,;\end{array}\right.$$

l'équation de M″N″ sera conséquemment

$$y-b=\frac{b-b'}{a'-a}(x-a')\,;$$

ou encore

$$(b-b')x+(a-a')y+(a'b'-ab)=0\,:$$

Par une simple transposition d'accens, on trouvera ; pour les équations

$$\text{De MN}\,;\qquad (b'-b'')x+(a'-a'')y+(a''b''-a'b')=0\,;$$

$$\text{De M}'\text{N}'\,,\qquad (b''-b\,)x+(a''-a\,)y+(a\,b\,-a''b'')=0\,:$$

Puisque l'origine est quelconque, on peut supposer qu'on l'a placée à l'intersection de ces deux dernières droites, ce qui revient à supposer qu'elles passent toutes deux par cette origine ; on doit avoir alors

$$a''b''=a'b'\,;\qquad ab=a''b''\,;$$

et par conséquent

$$a'b'=ab\,;$$

la droite $M''N''$ passe donc aussi alors par l'origine ; elle concourt donc au même point avec les deux autres (*).

(*) Des droites comprises dans un même plan n'étant qu'un cas particulier d'un système de droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et des droites parallèles, soit sur un plan soit dans l'espace, n'étant également qu'un cas particulier d'un système de droites concourant en un point ; il s'ensuit que le premier de nos deux théorèmes n'est qu'un cas très-particulier du suivant :

THÉORÈME. Soient AB, $A'B'$, $A''B''$, *trois droites situées dans l'espace d'une manière quelconque, en sorte néanmoins que leurs directions concourent en un même point. Si* C *est le point de concours de* $A'A''$ *et* $B'B''$; *que* C' *soit le point de concours de* $A''A$ *et* $B''B$; *et qu'enfin* C'' *soit le point de concours de* AA' *et* BB' ; *les trois points* C, C', C'' *seront situés sur une même ligne droite.*

La vérité de ce théorème s'aperçoit immédiatement en remarquant que AB, $A'B'$, $A''B''$ peuvent être considérés comme les arêtes latérales d'un tronc de pyramide triangulaire, dont alors les deux bases sont $AA'A''$, $BB'B''$; et que, les points C, C', C'' étant ceux où concourent les côtés correspondans de ces deux bases, ces points doivent se trouver sur la commune section de leurs plans, et par conséquent en ligne droite.

Mais on peut aussi supposer que les deux bases $AA'A''$, $BB'B''$ se coupent, entre les arêtes latérales ; donc, si D est le point de concours de $A'B''$ et $A''B'$, que D' soit celui de $A''B$ et AB'', et enfin D'' celui de AB' et $A'B$; D' et D'' seront en ligne droite avec C, D'' et D avec C', et D, D' avec C'' ; de sorte que les six points C, C', C'', D, D', D'' seront sur quatre droites, et conséquemment dans un même plan.

Soient présentement quatre droites AB, $A'B'$, $A''B''$, A''', B''', concourant en un même point dans l'espace ; en combinant ces quatre droites deux à deux, comme nous l'avons fait ci-dessus ; c'est-à-dire, en menant AA' et BB', AA'' BB'', $A'A''$ et $B'B''$, AA''' et BB''', $A'A'''$ et $B'B'''$, $A''A'''$ et $B''B'''$; on obtiendra six points de concours, lesquels, devant être situés sur quatre droites, seront conséquemment dans un même plan.

En menant, au contraire, les droites AB' et $A'B$, AB'' et $A''B$, $A'B''$ et $A''B'$, AB''' et $A'''B$, $A'B'''$ et $A'''B'$, $A''B'''$ et $A'''B''$, on obtiendra six nouveaux points qui seront deux à deux en ligne droite avec un des six premiers, ou trois à trois dans un même plan avec trois des six premiers ; de sorte que les douze