ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Observations sur les deux théorèmes de géométrie énoncés aux pages 250 et 320 du IV.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 253-255
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__253_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Observations sur les deux théorèmes de géométrie énoncés aux pages 250 *et* 320 *du IV.ᵉ volume des* Annales ;

Par M. J. B. Durrande.

M. Servois, dans un article inséré à la page 150 du IV.ᵉ volume de ce recueil, fait mention d'un beau théorème de géométrie plane, qu'il attribue à Simson, et dont M. Gergonne donne une démonstration analitique dans une note du même article. On a proposé ensuite à la page 320 du même volume, un autre théorème qui est exactement dans la géométrie à trois dimensions ce qu'est le premier dans la géométrie plane. J'ai cherché à ramener la démonstration de ces deux théorèmes à la belle théorie des transversales que MM. Carnot, Servòis et Brianchon semblent s'être approprié, par les développemens importans qu'ils lui ont donnés et les nombreuses et intéressantes applications qu'ils en ont faites. J'ai réussi, en effet, à trouver une démonstration assez simple du premier de ces deux théorèmes ; mais, en examinant le second avec plus d'attention je n'ai pas tardé à en découvrir la fausseté ; ce qui prouve que, s'il peut souvent être très-utile de se laisser guider par l'analogie, on ne saurait néanmoins, sans imprudence, accorder constamment une confiance entière aux résultats qu'on en déduit. Je vais d'abord faire connaître la démonstration que j'ai obtenue pour le premier des deux théorèmes; je prouverai ensuite la fausseté du second.

THÉORÈME I. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle quelconque, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit, sont tous trois sur une même ligne droite.

Démonstration. Soient ABC (fig. 4) le triangle dont il s'agit, P un point situé d'une manière quelconque sur la circonférence du cercle circonscrit, et Pc, Pa, Pb les perpendiculaires abaissées respectivement du point P sur les directions AB, BC, CA des côtés de ce triangle. Il s'agit de prouver que les trois points a, b, c appartiennent à une même ligne droite.

Pour y parvenir, soient d'abord menées les droites PA, PB, PC; on aura évidemment les proportions que voici;

$$\mathrm{B}a : \mathrm{C}a :: \mathrm{PB}\,Sin.\mathrm{BP}a : \mathrm{PC}\,Sin.\mathrm{CP}a\ ;$$

$$\mathrm{C}b : \mathrm{A}b :: \mathrm{PC}\,Sin.\mathrm{CP}b : \mathrm{PA}\,Sin.\mathrm{AP}b\ ,$$

$$\mathrm{A}c : \mathrm{B}c :: \mathrm{PA}\,Sin.\mathrm{AP}c : \mathrm{PB}\,Sin.\mathrm{BP}c\ .$$

En multipliant ces trois proportions terme à terme, on obtiendra, par la suppression des facteurs communs,

$$\mathrm{B}a.\mathrm{C}b.\mathrm{A}c : \mathrm{C}a.\mathrm{A}b.\mathrm{B}c$$

$$:: \mathrm{Sin.BP}a.\mathrm{Sin.CP}b.\mathrm{Sin.AP}c : \mathrm{Sin.CP}a.\mathrm{Sin.AP}b.\mathrm{Sin.BP}c.$$

Or, 1.° les angles BPa, APb sont égaux, comme ayant pour complémens PBC et PAC inscrits au même arc; 2.° les angles CPb, BPc sont égaux, comme ayant pour complémens PCA et PBC mesurés par la moitié du même arc ABP; 3.° enfin, APc et CPa sont égaux, comme ayant pour complémens PAB et PCB inscrits au même arc ; donc les deux termes du second rapport de notre dernière proportion sont égaux ; et on a conséquemment l'équation

$$Ba.Cb.Ac=Ca.Ab.Bc\ ;$$

ce qui, par les théorèmes connus, prouve que a, b, c sont en ligne droite.

THÉORÈME II. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les plans des faces d'un tétraèdre de l'un quelconque des points de la surface de la sphère circonscrite peuvent n'être pas *tous quatre dans un même plan.*

Démonstration. Supposons, en effet, que le point dont il s'agit soit pris dans le plan de l'une des faces du tétraèdre ; il sera lui-même le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette face ; si donc les trois autres pouvaient être dans un même plan avec celui-là, ce plan devrait aussi contenir les trois perpendiculaires elles-mêmes ; les faces sur lesquelles elles tombent devraient donc être perpendiculaires à ce plan ; il devrait donc en être de même de leurs intersections deux à deux ; le tétraèdre aurait donc les trois arêtes d'un même angle parallèles entre elles ; ce qui est absurde.