
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

**Géométrie analytique. Théorèmes nouveaux, sur les lignes
et surfaces du second ordre**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 95-98

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__95_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes nouveaux , sur les lignes et surfaces du second ordre ;

Par M. FRÉGIER , ancien élève de l'école polytechnique.



J'AI donné , à la page 229 du VI.^e volume de ce recueil , sur les lignes et surfaces du second ordre , deux théorèmes nouveaux , assez remarquables , que j'ai généralisés ensuite , à la page 321 du même volume. Je me suis aperçu postérieurement que ces théorèmes étaient susceptibles d'une généralisation beaucoup plus grande encore ; et c'est sous ce nouveau point de vue que je vais les reproduire ici.

THÉORÈME I. Si deux lignes du second ordre , tracées sur un même plan , sont telles que le centre de la seconde soit situé sur le périmètre de la première ; toutes les cordes qui , dans celle-ci , se termineront à ses intersections avec les prolongemens de deux diamètres conjugués de l'autre , se couperont en un même point , situé sur le conjugué du diamètre qui , dans la seconde courbe , est tangent à la première.

Démonstration. Soient pris pour axes des coordonnées les deux diamètres conjugués de la seconde courbe , dont l'un est tangent à la première , de manière que ce dernier soit l'axe des y . L'équation de la première courbe sera de la forme

$$y^2 + x(Ax + By + C) = 0. \quad (1)$$

Les équations des deux diamètres conjugués de la seconde seront de la forme

$$y = mx ; \quad y = m'x ; \quad (2)$$

avec la condition

$$mm' = k ; \quad (3)$$

k étant une constante. L'équation du système de ces deux diamètres sera donc

$$(y - mx)(y - m'x) = y^2 - (m + m')xy + mm'x^2 = 0 ,$$

ou

$$y^2 - (m + m')xy + kx^2 = 0 ; \quad (4)$$

retranchant cette dernière équation de l'équation (1), il viendra, en divisant par x ,

$$(A - k)x + (B + m + m')y + C = 0 ; \quad (5)$$

équation d'une droite qui est évidemment la corde qui, dans (1), joint ses points d'intersection avec le système de diamètres (4). Or, si, dans la vue de savoir en quel point cette droite coupe l'axe des x , on fait dans son équation $y = 0$, on en tirera

$$x = -\frac{C}{A - k} ,$$

quantité constante, tout-à-fait indépendante du système de diamètre conjugué qu'on a choisi ; ce qui démontre complètement le théorème énoncé.

THÉORÈME II. *Si deux surfaces du second ordre sont tellement situées dans l'espace, que le centre de la seconde soit sur la première, tous les plans sécants à celle-ci qui passeront par les points où elle est traversée par les prolongemens de trois diamètres conjugués quelconques de l'autre, se couperont en un même point, situé sur le diamètre de la seconde surface dont les conjugués sont tangens à la première.*

Démonstration. Soient Σ la première surface, S la seconde, et O le centre de celle-ci, situé sur l'autre. Concevons, par ce centre, trois diamètres conjugués dont les directions rencontrent Σ en A , B , C . Imaginons ensuite que l'on passe de ce système de diamètres conjugués à un autre, dans lequel les directions des diamètres rencontrent Σ en A' , B' , C ; c'est-à-dire, de manière que le diamètre dont la direction est OC soit commun aux deux systèmes. Il est connu que les deux angles AOB , $A'OB'$ seront dans un même plan.

Soient σ et s les lignes du second ordre suivant lesquelles ce plan coupe les surfaces Σ et S . Soit T le plan tangent à Σ en O ; et soit enfin t la droite suivant laquelle ce plan est coupé par le plan des angles AOB , $A'OB'$; cette droite t sera tangente à σ en O .

Cela posé; s est une ligne du second ordre, située dans le même plan avec σ , et ayant son centre sur son périmètre; et OA' , OB' ; aussi bien que OA , OB , sont les directions de deux diamètres conjugués de cette courbe; d'où il suit (*Théorème I*) que les deux cordes AB , $A'B'$ se couperont en quelque point P du diamètre de s dont le conjugué est t ; et que ce point P sera tout-à-fait fixe et indépendant de la situation du second système par rapport au premier.

Donc aussi les deux plans ACB , $A'CB'$, qui passent constamment par les deux points fixes C , P , se couperont constamment suivant une droite CP , fixe comme ces deux points, et tout-à-fait indépendante de la situation respective des deux plans.

OP et t sont donc deux conjugués de OC ; d'où il suit que, réciproquement, OC et OP sont deux conjugués de t ; donc, par les théories connues, tous les autres conjugués de t sont situés dans

le plan COP ; or , le diamètre de S dont tous les conjugués sont situés dans le plan T est aussi un conjugué de t ; donc aussi ce diamètre est dans le plan COP , et coupe conséquemment la droite CP en quelque point Q.

Il demeure donc établi par là que le système de diamètres conjugués dont les directions sont OA , OB , OC , venant à varier d'une manière quelconque , de sorte cependant que l'un d'eux reste fixe , le plan ABC coupera constamment , en un même point fixe , le diamètre de S dont tous les conjugués sont dans le plan T ; et , comme il est d'ailleurs connu qu'on peut toujours passer d'un système de diamètres conjugués à un autre quelconque , au moyen de trois transformations successives telles que , dans chacune d'elles , un des diamètres reste fixe (*), il s'ensuit que le théorème est complètement démontré.

(*) Cette proposition peut facilement être établie comme il suit :

Soient A , B , C trois demi-diamètres conjugués ; et soient A'' , B'' , C'' trois autres demi-diamètres conjugués , totalement différens des premiers.

Soit B' la droite suivant laquelle se coupent les plans de BC et de A''B'' ; et soit C' la droite suivant laquelle se coupent les plans AC'' et BC. B' étant dans le plan BC sera l'un des conjugués de A , qui , réciproquement , sera l'un des siens ; mais , parce que B' est dans le plan A''B'' sera aussi l'un des conjugués de C'' ; donc , le plan AC' sera le plan des conjugués de B' ; puis donc que le plan B'C' est également le plan des conjugués de A ; il s'ensuit que A , B' , C' forme un système de diamètres conjugués , ayant le demi-diamètre A commun avec le premier.

Soit A' la droite suivant laquelle se coupent les plans AC' et A''B'' ; A'B' étant le plan des conjugués de C'' , et A'C'' le plan des conjugués de B' ; il s'ensuit que A' , B' , C'' forment un système de diamètres conjugués , ayant le diamètre B' commun avec le second.

Enfin , A'' , B'' , C'' est un quatrième système de diamètres conjugués ayant le diamètre C'' commun avec le troisième ; ce qui démontre complètement la proposition annoncée.

On peut déduire bien simplement de ces considérations une propriété remarquable des diamètres conjugués. Supposons , par exemple , pour fixer les idées , qu'il soit question de l'ellipsoïde ; et considérons les quatre systèmes