L. B. FRANCŒUR

Gnomonique. Méthode universelle, commune à toutes les latitudes, pour tracer toutes sortes de cadrans solaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 233-244
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__233_0>

GNOMONIQUE.

Méthode universelle, commune à toutes les latitudes, pour tracer toutes sortes de cadrans solaires ;

Par M. L. B. Francœur, professeur à la faculté des sciences de Paris, etc.

On trouve, dans l'ancienne *Encyclopédie* (Suppl.[t] au mot *Cadran*), la démonstration d'un procédé très-ingénieux et très-simple, propre à toutes les latitudes, pour tracer des cadrans solaires horizontaux, à l'aide de deux *échelles* convenablement divisées, et construites à l'avance, une fois pour toutes. La simplicité de ce moyen de construction, qui, n'exigeant qu'un peu d'usage de la règle, se trouve ainsi à la portée des ouvriers même les moins intelligens, en fait une méthode extrêmement remarquable. Mais, dans l'ouvrage cité, la démonstration m'en ayant semblé très-laborieuse, et de nature à conduire à des résultats imparfaits, j'ai cru faire une chose utile, en essayant de reprendre toute cette doctrine, pour la présenter sous un jour tout-à-fait nouveau. Je ferai voir ensuite avec quelle facilité la méthode s'applique au tracé des cadrans verticaux ou inclinés, déclinans ou non déclinans.

Soit C le centre d'un cadran horizontal (fig. 1), c'est-à-dire, le point où ce cadran est rencontré par le style, que l'on sait d'ailleurs devoir être ; dans tout cadran quelconque, dirigé vers le pôle. Soient CA la *méridienne* ou la projection du style, et CB une perpendiculaire à cette méridienne, et par conséquent la ligne de *six heures*. On sait que dans le cadran horizontal, les lignes horaires qui répondent à des heures également distantes de part et d'autre de midi, font aussi de part et d'autre des angles égaux avec la méridienne. On sait, en outre, que les lignes horaires qui répondent aux heures qui précèdent six heures du matin ou qui suivent six heures du soir, ne sont que les prolongemens respectifs de celles qui appartiennent aux heures correspondantes d'avant six heures du soir, ou d'après six heures du matin. Ainsi tout se réduit à savoir tracer les lignes horaires qui répondent aux heures comprises entre midi et six heures du soir.

Soit CX une de ces lignes horaires, répondant à une heure donnée quelconque, comprise entre ces limites. Soit menée une droite arbitraire AB, joignant un point quelconque de la méridienne à un point quelconque de la ligne de six heures. La ligne horaire CX sera connue, si nous connaissons en quel point X elle coupe la droite AB, que nous supposons fixe ; et ce point X sera connu, à son tour, si nous parvenons à déterminer sa distance AX au point A. Cherchons donc l'expression de cette distance.

Faisons $CB=a$, $CA=b$, $AB=c$, d'où résultera la relation

$$a^2+b^2=c^2\,; \qquad (1)$$

nous aurons

$$\mathit{Sin}.\mathrm{CBA}=\frac{b}{c}\,, \qquad \mathit{Cos}.\mathrm{CBA}=\frac{a}{c}\,.$$

Soit fait $\mathit{Ang}.\mathrm{ACX}=x$, d'où

$$\mathit{Sin}.\mathrm{XCB}=\mathrm{Cos}.x\,, \quad \mathit{Cos}.\mathrm{XBC}=\mathrm{Sin}.x\,;$$

nous aurons

$$Sin.\mathrm{CXA}=Sin.(\mathrm{XCB}+\mathrm{XBC})=Sin.\mathrm{XCB}\,Cos.\mathrm{XBC}+Sin.\mathrm{XBC}\,Cos.\mathrm{XCB}$$

c'est-à-dire,

$$Sin.\mathrm{CXA}=\frac{a\mathrm{Cos}.x+b\mathrm{Sin}.x}{c}.$$

Mais, à cause de la proportionnalité des sinus des angles aux côtés qui leur sont opposés, on a

$$\mathrm{AX}=\mathrm{AC}.\frac{Sin.\mathrm{ACX}}{Sin.\mathrm{CXA}}=b.\frac{\mathrm{Sin}.x}{Sin.\mathrm{CXA}};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\mathrm{AX}=\frac{bc\mathrm{Sin}.x}{a\mathrm{Cos}.x+b\mathrm{Sin}.x}=\frac{bc\mathrm{Tang}.x}{a+b\mathrm{Tang}.x}.$$

Cela posé, concevons une sphère qui ait son centre au centre C du cadran. La méridienne CA, la ligne horaire CX et la direction du style, détermineront sur cette sphère les sommets d'un triangle sphérique rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit sera la hauteur du pôle ou la latitude du lieu, l'autre l'arc qui mesure l'angle inconnu x, et l'angle oblique opposé à ce dernier, l'angle horaire qui répond à l'heure indiquée par AX, à raison de 15° par heure.

Désignant donc cet angle horaire par h, et la latitude du lieu par l, nous aurons, par les théories connues,

$$\mathrm{Tang}.x=\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Tang}.h\,.$$

Cette valeur étant substituée dans celle de AX ci-dessus, elle deviendra enfin

$$\mathrm{AX}=\frac{bc\,\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Tang}.h}{a+b\,\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Tang}.h}.$$

Si ensuite on désigne par M le milieu de AB, on aura

$$\mathrm{MX}=\mathrm{AM}-\mathrm{AX}=\tfrac{1}{2}c-\mathrm{AX}\ ,$$

c'est-à-dire, en substituant et réduisant,

$$\mathrm{MX}=\tfrac{1}{2}c.\frac{a-b\,\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Tang}.h}{a+b\,\mathrm{Sin}.l\,\mathrm{Tang}.h}. \qquad (2)$$

Or, la transversale AB étant arbitraire, et les grandeurs a, b, c ne se trouvant conséquemment liées entre elles que par la seule relation (1), il nous est permis de les lier encore par deux autres relations; ou, ce qui revient au même, nous pouvons supposer c constant et donné, et établir une nouvelle relation entre a et b; et c'est à ce dernier parti que nous nous arrêterons.

Or, l'inspection de la formule (2) montre que, parmi toutes les relations que nous pourrions choisir, celle que nous devons préférer est

$$a=b\,\mathrm{Sin}\,l\ ; \qquad (3)$$

car alors cette formule (2) devient simplement

$$\mathrm{MX}=\tfrac{1}{2}c.\frac{1-\mathrm{Tang}.h}{1+\mathrm{Tang}.h}\ ,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{MX}=\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Tang}.(45^\circ-h)\ . \qquad (4)$$

D'un autre côté, en combinant entre elles les relations (1, 3) pour en éliminer b, il vient

$$a=\frac{c\text{Sin}.l}{\sqrt{1+\text{Sin}.^2l}}\ ;$$

de sorte que, si l'on fait

$$\text{Sin}.l=\text{Tang}.\varphi\ , \qquad (5)$$

φ étant un angle auxiliaire, on aura

$$a=c.\frac{\text{Tang}.\varphi}{\sqrt{1+\text{Tang}.^2\varphi}}=c\text{Sin}.\varphi\ ;$$

c'est-à-dire

$$\text{CB}=c\text{Sin.Arc}(\text{Tang.}=\text{Sin}.l)\ . \qquad (6)$$

Présentement, on peut remarquer, et c'est principalement en ceci que consiste le mérite de la méthode; on peut remarquer, dis-je, que AB ou c étant pris d'une longueur arbitraire, mais déterminée et constante, ainsi que nous venons de le supposer plus haut; MX se trouve tout-à-fait indépendante de la latitude, et CB de l'angle horaire. Ainsi, pour toutes les latitudes, on pourra employer une même règle ou échelle AB sur laquelle seront marqués, une fois pour toutes, les points X qui répondent aux diverses lignes horaires qu'on se propose de tracer sur le cadran; et, au moyen d'une autre règle où seront aussi marqués, une fois pour toutes, les points B qui répondent aux diverses latitudes, et qu'on appliquera le long de CB, il ne s'agira, pour une latitude donnée, que de fixer l'extrémité B de la première règle au point de celle-ci qui répondra à cette latitude (*). Tout se réduit donc à diviser les deux règles; et nous allons bientôt voir que rien n'est plus facile.

(*) On peut même construire sur ces principes un système de règles en bois, ou mieux en cuivre, qui faciliterait beaucoup l'opération. Deux de ces règles CA, CB, tout-à-fait fixes et d'une longueur arbitraire seraient perpendi-

I. *Construction de l'échelle des heures.* Avant d'enseigner à construire cette échelle, nous ferons remarquer, 1.° que, si l'on pose $h=45^\circ$, ainsi qu'il arrive à *trois heures*, la formule (4) donne $\mathrm{MX}=0$; 2.° que si l'on pose successivement $h=45^\circ-k$, $h=45^\circ+k$, il viendra $\mathrm{MX}=\frac{1}{2}c\,\mathrm{Tang.}k$, $\mathrm{MX}=-\frac{1}{2}c\,\mathrm{Tang.}k$, valeurs qui ne diffèrent que par le signe. Ainsi, lorsque la règle AB est disposée de la manière qui convient à la latitude, 1.° la ligne de trois heures doit passer par son milieu M; 2.° les lignes horaires également distantes de part et d'autre de trois heures coupent cette règle en des points symétriquement disposés de part et d'autre du point M.

On voit donc que tout se réduit à diviser la moitié de cette règle, en répétant les divisions dans un ordre rétrograde pour son autre moitié. Or, la formule (4) montre que l'opération se réduit à ce qui suit : soit MA (fig. 2) la moitié de cette règle; soit élevée au point M la perpendiculaire MO$=$MA, et soit menée OA. Alors, pour avoir le point de MA qui répond à une heure donnée, on mènera par O une droite faisant avec OA un angle égal à l'angle horaire correspondant; et l'intersection X de cette droite avec MA sera le point cherché; car on aura

$$\mathrm{MX}=\mathrm{OM}\,\mathit{Tang}.\mathrm{MOX}=\mathrm{OM}\,\mathit{Tang}.(\mathrm{MOA}-\mathrm{AOX})=\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Tang}.(45^\circ-h).$$

En décrivant donc, entre les côtés de l'angle AOM, et d'un rayon quelconque, le demi-quadrans DE. divisant ce demi-quadrans en trois, six ou douze parties égales, suivant qu'on voudra marquer les heures,

---

culaires l'une à l'autre; la troisième AB d'une longueur invariable, et ayant toujours ses extrémités sur les deux premières ne devrait changer de situation, dans l'angle ACB, que pour un changement de latitude; enfin, la quatrième CX d'une longueur indéfinie, et ne pouvant que tourner autour du point C, pourrait se fixer à tous les points de AB, et dirigerait le crayon dans le tracé des lignes horaires.

les demi-heures ou les quarts-d'heures, et menant des droites du point O aux points de division; ces droites détermineront les divisions de MA, qu'il faudra ensuite porter sur son prolongement vers B.

II. *Construction de l'échelle des latitudes.* Au point C de CB (fig. 3) soit menée à cette droite une perpendiculaire $CF=AB=c$; et soit menée à CB, par le point F, la parallèle indéfinie FP. Du point C comme centre et avec le rayon CF, soit décrit le quadrans FLG. Alors, pour obtenir le point de division B de CB qui répond à une latitude donnée, on prendra sur FG, de F en L un arc égal à cette latitude; on abaissera la perpendiculaire LP sur FP; on mènera CP coupant FL en Q; enfin, en abaissant QB perpendiculaire sur CB, son pied B sera le point demandé.

En effet, en menant LR et QS, perpendiculaire sur CF, on aura

$$CB=SQ=CQ\mathit{Sin}.FQ=CF\mathit{Sin}.\mathit{Arc}(\mathit{Tang}.=FP)$$

$$=CF\mathit{Sin}.\mathit{Arc}(\mathit{Tang}.=LR)=CF\mathit{Sin}.\mathit{Arc}(\mathit{Tang}.=\mathit{Sin}.FL)\;;$$

c'est-à-dire

$$CB=c\mathrm{Sin.Arc.}(\mathrm{Tang.}=\mathrm{Sin.}l)\;;$$

comme l'exige la formule (6) (*).

(*) A ces constructions on peut, au surplus, substituer les suivantes, qui se présentent moins naturellement, à la vérité; mais qui ont peut-être l'avantage de donner les points de division des deux échelles d'une manière moins confuse.

I. *Échelle des heures.* Sur MA, comme rayon (fig. 4), soit décrit le quadrans AHO et menée la corde AKO; soit pris l'arc AH double de l'angle horaire; soit menée BH coupant AO en K; le pied X de la perpendiculaire abaissée de ce point K sur MA sera le point cherché.

II. *Échelle des latitudes.* Sur la ligne de six heures, soit prise une partie

III. *Réduction en tables.* Quelques simples que puissent paraître les constructions que nous venons d'indiquer, elles présentent, comme tous les procédés graphiques, l'inconvénient de n'offrir qu'une précision subordonnée à l'adresse de celui qui opère, et, dans tous les cas, très-limitée. Nous croyons donc faire une chose utile en réduisant en tables les divisions de nos deux échelles, c'est-à-dire, les deux formules (4 et 6); ce qui est très-aisé, au moyen des tables de sinus et de logarithmes. Nous supposons, dans ces tables, la longueur AB ou C=1000000; c'est-à-dire que nous supposons l'échelle des heures divisée en un million de parties égales, ce qui est plus que suffisant pour le cas même où le cadran aurait l'excessive étendue d'un mètre quarré; mais on sera toujours libre de n'admettre que 100000, 10000,...... division dans cette échelle, en rejetant un, deux,...... chiffres sur la droite dans tous les nombres des deux tables.

La correspondance des divisions de AB, de part et d'autre du point qui répond à trois heures, nous a permis de donner à la première table, calculée de trois en trois minutes de temps, une disposition analogue à celles des tables trigonométriques. Quant à la seconde, nous l'avons calculée de degré en degré, pour les deux premiers tiers du quadrans; et de deux en deux degrés seulement pour le troisième tiers; ce qui paraît plus que suffisant.

CT=AB (fig. 5); sur sa moitié IC soit décrit le quadrans CLN; soit pris l'arc CL égal à la latitude; soit menée LU, parallèle à CT, et coupant IN en U; soit menée TU, prolongée jusqu'à la circonférence en V; décrivant alors un arc du point C comme centre, et avec le rayon CV, cet arc déterminera sur CT le point B cherché.

Le lecteur s'assurera facilement que ces constructions reviennent à celles du texte.

TABLE DES HEURES.

m.	O.h		m.	I.h		m.	II.h	
0	500 000	60	0	288 676	60	0	133 975	60
3	487 078	57	3	280 013	57	3	126 984	57
6	474 482	54	6	271 478	54	6	120 039	54
9	462 195	51	9	263 063	51	9	113 138	51
12	450 202	48	12	254 763	48	12	106 278	48
15	438 488	45	15	246 573	45	15	99 456	45
18	427 040	42	18	238 488	42	18	92 669	42
21	415 846	39	21	230 503	39	21	85 916	39
24	404 892	36	24	222 614	36	24	79 192	36
27	394 168	33	27	214 817	33	27	72 496	33
30	383 663	30	30	207 107	30	30	65 826	30
33	373 368	27	33	199 480	27	33	59 180	27
36	363 271	24	36	191 932	24	36	52 552	24
39	353 365	21	39	184 460	21	39	45 943	21
42	343 640	18	42	177 059	18	42	39 351	18
45	334 089	15	45	169 727	15	45	32 772	15
48	324 704	12	48	162 460	12	48	26 204	12
51	315 477	9	51	155 254	9	51	19 645	9
54	306 400	6	54	148 107	6	54	13 093	6
57	297 469	3	57	141 015	3	57	6 545	3
60	288 676	0	60	133 975	0	60	0	0
	V.h	m.		IV.h	m.		III.h	m

TABLE DES LATITUDES.

l	a	l	a	l	a
1°	17 448	26°	401 491	51°	613 631
2	34 880	27	413 382	52	618 938
3	52 263	28	424 968	53	624 046
4	69 587	29	436 243	54	628 959
5	86 827	30	447 213	55	633 688
6	103 959	31	457 878	56	638 230
7	120 984	32	468 238	57	642 594
8	137 847	33	478 300	58	646 782
9	154 557	34	488 109	59	650 804
10	171 088	35	497 529	60	654 653
11	187 429	36	506 740	62	661 872
12	203 561	37	515 640	64	668 467
13	219 468	38	524 267	66	674 471
14	235 137	39	532 626	68	679 904
15	250 563	40	540 718	70	684 794
16	265 729	41	548 544	72	689 152
17	280 625	42	556 118	74	693 007
18	295 240	43	563 438	76	696 369
19	309 575	44	570 514	78	699 254
20	323 615	45	577 351	80	701 673
21	337 360	46	583 954	82	703 638
22	350 802	47	590 324	84	705 164
23	363 938	48	596 474	86	706 246
24	376 763	49	602 403	88	706 891
25	389 280	50	608 119	90	707 107

La figure 6 représente les deux échelles, divisées suivant ces tables, en supposant à AB la longueur d'un décimètre.

Si l'on considère présentement que tout cadran solaire vertical ou incliné, déclinant ou non déclinant, pourvu toutefois que sa surface soit plane, est un cadran horizontal pour le point de la surface de la terre dont le plan tangent serait parallèle à celui de ce cadran, on verra aussitôt que la méthode que nous venons de donner pour tracer un cadran horizontal est également applicable à la construction de tout cadran quelconque. Il faut seulement substituer à la latitude du lieu celle du point du globe pour lequel le plan tangent est parallèle à celui du cadran, et avoir égard à la différence dans la manière de compter les heures qui naît de la différence entre la longitude de ce point et celui du lieu pour lequel le cadran est destiné.

Soient donc λ la longitude et l la latitude du lieu; soient Λ et L les mêmes élémens pour le point du globe dont le cadran horizontal est parallèle à celui qu'il s'agit de tracer. Soient enfin i l'inclinaison du plan du cadran, c'est-à-dire, l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, mesuré au-dessus de ce dernier plan et du côté du nord, et d la déclinaison du même plan, c'est-à-dire, l'angle que fait l'horizontale tracée sur ce plan, avec l'horizontale qui joint les points d'est et d'ouest, mesuré à l'est, et au nord de cette dernière droite; d'après ces notations, on trouvera aisément

$$\mathrm{Sin.L} = \mathrm{Cos.}i\,\mathrm{Sin.}l - \mathrm{Sin.}i\,\mathrm{Cos.}l\,\mathrm{Cos.}d\,; \qquad (7)$$

$$\mathrm{Tang.}(\Lambda - \lambda) = \frac{\mathrm{Tang.}i\,\mathrm{Sin.}d}{\mathrm{Cos.}l + \mathrm{Tang.}i\,\mathrm{Sin.}l\,\mathrm{Cos.}d}\,. \qquad (8)$$

Cela posé. Lorsqu'on voudra tracer un cadran plan quelconque, on choisira sur sa surface un point pour centre, par lequel on mènera une horizontale et une perpendiculaire à cette horizontale. Le complément de l'angle de cette perpendiculaire avec la verticale sera l'inclinaison du cadran que l'on prendra pour i et qu'on fera positive ou négative suivant que le cadran regardera le midi ou le nord.

Par le centre du même cadran, on concevra une seconde horizontale perpendiculaire à la méridienne horizontale du lieu ; on prendra pour d l'angle de cette horizontale avec la première, en donnant à d le signe *plus* ou le signe *moins*, suivant que le plan du cadran regardera l'orient ou l'occident.

A l'aide de i et d et de la latitude l du lieu on calculera Sin.L Tang.$(\Lambda-\lambda)$, par les formules (7, 8) ; d'où on conclura L et $\Lambda-\lambda$. On n'aura nul égard au signe de L ; mais on aura attention à celui de $\Lambda-\lambda$.

On posera le style qui, comme nous l'avons déjà dit, doit toujours passer par le centre du cadran, et être constamment dirigé vers le pôle. On en déterminera la projection sur le cadran : ce serait la ligne de midi pour le lieu pour lequel le cadran serait horizontal. On mènera, par le centre, une perpendiculaire à cette projection : ce serait la ligne de six heures pour le même lieu.

On disposera ensuite l'échelle des heures sur ces deux lignes, comme nous l'avons dit ci-dessus pour les cadrans horizontaux ; mais en employant la latitude L, au lieu de la latitude l.

Enfin, on tracera les lignes horaires, mais en observant que, pour tracer par exemple la ligne horaire qui répond à l'heure quelconque H, il faudra employer le point de division de l'échelle des heures qui répond à l'heure

$$H+\frac{\Lambda-\lambda}{15^{\circ}}.$$

Dans le cas particulier, et le plus ordinaire, où le cadran est vertical, les formules (7 et 8) deviennent simplement

$$\text{Sin.L}=-\text{Cos.}l\,\text{Cos.}d\quad,\qquad \text{Tang.}(\Lambda-\lambda)=\frac{\text{Tang.}d}{\text{Sin.}\,l}.$$

Je ne sais si je m'abuse, mais il me paraît que les quelques pages qui précèdent peuvent suppléer, avec avantage, les nombreux et volumineux traités qu'on a écrit sur la gnomonique.