ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Solution du problème de géométrie proposé à la page 140 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 312-315
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__312_1>

Solution du problème de géométrie proposé à la page 140 de ce volume ;

Par M. GERGONNE.

PROBLÈME. *A quelle courbe appartient une suite indéfinie de points tellement situés sur un même plan ;* 1.° *que leurs ordonnées sont équidistantes ;* 2.° *que la droite menée de l'origine à chacun d'eux, et prolongée au-delà, retranche de l'ordonnée de celui qui le suit immédiatement, à sa partie supérieure, une longueur constante ?*

Solution. Soit a la distance constante entre les ordonnées consécutives ; et soit b la longueur, aussi constante, retranchée à chacune, à sa partie supérieure, par le prolongement de la droite menée de l'origine au point qui précède immédiatement celui auquel cette ordonnée appartient.

Concevons que, à partir de l'un quelconque, ces points aient été consécutivement numérotés 1, 2, 3, ... $z-1$, z; soient P_{z-1}, P_z ceux d'entre eux qui occupent respectivement les rangs $z-1$ et z; soient x_{z-1}, y_{z-1} les coordonnées du premier; soient x_z, y_z les coordonnées du second; l'équation de la droite menée de l'origine au point P_{z-1} sera

$$y=\frac{y_{z-1}}{x_{z-1}}x\ ;$$

en conséquence, la partie de l'ordonnée de P_z interceptée entre cette droite et l'axe des x sera

$$\frac{y_{z-1}}{x_{z-1}}x_z\ ;$$

il faudra donc que cette longueur, augmentée de b, soit égale à l'ordonnée de P_z; c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{y_{z-1}}{x_{z-1}}z_z+b=y_z\ ;$$

c'est-à-dire,

$$y_zx_{z-1}-x_zy_{z-1}=bx_{z-1}\ ; \qquad (1)$$

mais si l'on appelle A l'abscisse arbitraire du point P_0, on aura

$$x_{z-1}=A+(z-1)a\ , \qquad x_z=A+za\ ;$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (1); elle deviendra

$$[A+(z-1)a]y_z-[A+za]y_{z-1}=b[A+(z-1)a]\ ; \qquad (2)$$

équations aux différences du premier ordre et du premier degré.

L'intégrale de cette équation est, en désignant par B l'ordonnée qui répond à l'abscisse A

$$y=(A+za)\left\{\frac{B}{A}+b\left[\frac{1}{A+za}+\frac{1}{A+(z-1)a}+\frac{1}{A+(z-1)a}+\ldots\ldots+\frac{1}{A+a}\right]\right\};$$

mais on a $A+za=x$; substituant donc, il viendra

$$y=x\left\{\frac{B}{A}+b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}+\ldots\ldots+\frac{1}{A+a}\right)\right\}.$$

Si l'on suppose $A=a$ et $B=b$, cette équation deviendra

$$y=bx\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\ldots\ldots+\frac{1}{x}\right).$$

Un géomètre nous a adressé une solution pour le cas où la distance constante entre les ordonnées étant infiniment petite et égale à $\mathrm{d}x$, la longueur b serait aussi infiniment petite et égale à $\lambda\mathrm{d}x$. On a dans ce cas

$$y(x-\mathrm{d}x)-x(y-\mathrm{d}y)=\lambda\mathrm{d}x(x-\mathrm{d}x)\ ;$$

ou en réduisant

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\lambda x\mathrm{d}x\ ;$$

ou encore

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\lambda\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lambda\mathrm{d}.\mathrm{Log}.x\ ;$$

d'où

$$\frac{y}{x}=\lambda\mathrm{Log}.Cx,$$

ou encore

$$y=\lambda x\mathrm{Log}.Cx\ .$$

Si l'on veut que la courbe passe par le point (A, B), on aura

$$B=\lambda A\mathrm{Log}.CA\ ;$$

ce qui donne

$$C=\frac{\sqrt[\lambda A]{e^B}}{A};$$

donc

$$y=\lambda x \,\text{Log.}\, \frac{x}{A}\sqrt[\lambda A]{e^B},$$

ou bien

$$y=\lambda x\left\{\text{Log.}\,\frac{x}{A}+\frac{B}{\lambda a}\right\}.$$