ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRANCŒUR

Gnomonique. Sur la méthode universelle, pour tracer toutes sortes de cadrans solaires à toutes latitudes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 91-97
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__91_0>

GNOMONIQUE.

Sur la méthode universelle, pour tracer toutes sortes de cadrans solaires à toutes latitudes;

Par M. FRANCŒUR, professeur à la faculté des sciences de Paris.

Au Rédacteur des Annales;

MONSIEUR,

LE but du petit mémoire de Gnomonique que j'ai eu l'honneur de vous adresser il y a quelque temps, et que vous avez eu la bonté d'insérer à la page 233 de votre VIII.e volume, était de donner des moyens faciles de tracer, à toutes latitudes, des cadrans horizontaux. Les échelles dont j'ai indiqué la construction résolvent la question avec une telle facilité, que le dessinateur le moins instruit peut former aisément un de ces cadrans. J'ai terminé par exposer un moyen de calcul, pour *réduire au tracé d'un cadran horizontal toutes sortes de cadrans plans*. Les éclaircissemens qui m'ont été demandés, sur ce dernier problème, m'ont convaincu qu'en cherchant à être bref, je ne m'étais pas fait suffisamment comprendre: c'est ce qui me détermine à revenir ici de nouveau sur le même sujet, dans la vue de lui donner un peu plus de développement.

Tout cadran est censé construit au centre du globe : l'axe de la terre est le style dont l'ombre se porte d'heure en heure sur diverses lignes tracées d'avance, et qui sont les intersections du plan du cadran avec une suite de plans conduits par l'axe de la terre. C'est lorsque le soleil atteint celui de ces plans qui est le méridien d'un lieu qu'on y compte midi, et que l'ombre du style se projette sur la meridienne du cadran : si le soleil est à 15° de ce plan, il est 11^h ou 1^h dans le même lieu, suivant que l'astre est à droite ou à gauche du méridien. (Voyez la 2.me édition de l'*Uranographie*).

Ces faits établis, passons à la résolution du problème, en commençant par le cas où le plan proposé décline, sans inclinaison.

Soient (fig. 5) Z le zénith d'un lieu, P le pôle, O le centre du monde, OP l'axe, AZPI le méridien céleste, ABGICD l'horizon, BZVC un plan vertical donné, sur lequel on se propose de tracer un cadran solaire. GOD, perpendiculaire sur BC determinera évidemment en D le zénith du lieu où le plan horizontal est parallèle à celui BZC du cadran. L'azimuth du plan BZC est l'angle AOB qu'il fait avec le méridien ; et, à cause de l'angle droit BOD, l'angle DOA est complément de l'azimuth, c'est-à-dire la déclinaison $DZA = d$ du plan proposé. C'est, en d'autres termes, l'angle que fait notre cadran avec le *premier vertical*, passant par les points *est* et *ouest*.

Désignons par l et L les latitudes des lieux Z et D ; joignons D au pôle, par un arc de grand cercle, et nous aurons un triangle sphérique ZDP, qui a pour élémens $ZP = 90° - l$, $DP = 90° + L$, $ZD = 90°$, $DZP = 180° - d$, $ZPD = \Lambda - \lambda$, différence des longitudes.

Il s'agit de trouver L et Λ. Les équations connues de la trigonométrie sphérique donnent (Voyez l'*Uranographie*, équations 17 et 20, pag. 383 et 387).

$$Cos.DP = Cos.ZD.Cos.ZP + Sin.ZD.Sin.ZP.Cos.Z\ ,$$

$$Sin.ZP\,Cot.ZD = Cos.ZP.Cos\,Z + Sin.Z.Cot.ZPD\ ;$$

ce qui revient à

$$\text{Sin.}L=\text{Cos.}l\text{Cos.}d\ , \qquad \text{Cot}\,(\Lambda-\lambda)=\text{Sin.}l\text{Cot.}d\ .$$

Ces deux équations très-simples serviront à trouver sur le globe la situation du lieu D, par sa longitude Λ et sa latitude L. Il ne s'agira donc que de décrire un cadran horizontal, pour ce lieu D, à l'aide de nos échelles. Mais il y aura ici deux précautions à prendre.

1.° Le style devra être dirigé parallèlement à l'axe OP; et l'ombre de OF devra indiquer les heures. La méridienne sera donc la projection de OF sur le plan BZC du cadran; projection qu'on nomme *soustylaire*; 2.° une fois les lignes horaires du cadran horizontal tracées, il faudra en changer les dénominations, attendu que les lieux Z et D comptent une heure de plus ou de moins l'un que l'autre pour chaque 15° de différence en longitude; ainsi, par exemple, la ligne de X heures deviendra celle de XI ou de IX, s'il y a précisément 15° de différence, à l'est ou à l'ouest.

On ne peut donc appliquer nos échelles à ce tracé, sans avoir d'abord placé le style parallèlement à l'axe du monde. Il y a, pour y parvenir, divers moyens, que nous avons exposés dans l'ouvrage déjà cité : on peut, au reste, y parvenir par le calcul que voici. Le plan DOP est le méridien du point D, puisqu'il passe par ce point et par le pôle; si donc V est l'intersection des arcs PD et ZC; ce point V sera l'un des points de la soustylaire-méridienne, et il ne s'agira conséquemment que d'en fixer la position. Or, le triangle sphérique PVZ, rectangle en V, a pour élémens

$$ZP=90°-l\ ;\quad Z=98°-d\ ;\quad V=90°\ ;$$

l'angle ZV, formé par la soustylaire et la méridienne sera donc donné par la formule

$$\text{Tang.}ZV=\text{Cot.}l\text{Sin.}d\ ;$$

Ainsi, après avoir tracé la verticale CM (fig. 6) sur le plan déclinant proposé, pour représenter la ligne de midi : en un point quelconque C de cette droite, pris pour *centre*, on fera l'angle MCS égal à la valeur trouvée de ZV ; CS sera le soustylaire, au-dessus de laquelle, dans un plan SCT, perpendiculaire à celui du cadran, devra être élevé le style CT, formant sur CS l'angle SCT=L. Sur CS comme méridienne, et sa perpendiculaire CO, comme ligne de VI heures, on tracera, à l'aide des échelles, un cadran horizontal, pour la latitude L; ce sera le cadran demandé, du moins après y avoir changé les dénominations des lignes horaires ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

Supposons, par exemple, que la latitude du lieu étant $48^\circ.12'$, la déclinaison du plan soit $10^\circ.12'$; on fera le calcul que voici :

$$\text{Log. Cot.}\,l = 9.9513876$$

$$\text{Log. Sin.}\,d = 9.2481811$$

$$\text{Log.Tang.ZV} = 9.1995687$$

Donc $ZV = 8^\circ.59'50''$ (sensiblement 9°) ; on fera donc l'angle $MCS = 9^\circ$; à droite ou à gauche de CM, suivant que le plan déclinera à l'ouest ou à l'est. CS sera la soustylaire, ou la méridienne d'un cadran horizontal, pour le lieu dont les longitude et latitude Λ, L sont données ainsi qu'il suit.

$\text{Los.Cos.}\,l = 9.8238213$	$\text{Log.Sin.}\,l = 9.8724337$
$\text{Log.Cos.}\,d = 9.9930814$	$\text{Log.Cot.}\,d = 0.7449003$
$\text{Log.Sin.}\,L = 9.8169027$	$\text{Log.Cot.}(\Lambda-\lambda) = 0.6173340$
$L = 40^\circ.59'.50''$.	$\Lambda-\lambda = 13^\circ.34'.10''$.

On fixera le style dans un plan perpendiculaire au cadran, et élevé au-dessus de CS; l'angle SCT, formé par ce style, devra être de 41°. Sur l'angle droit SCO, en prenant CS pour meridienne, on décrira un cadran horizontal pour cette latitude de 41°, et le cadran demandé sera tracé. Mais, après avoir marqué les lignes horaires, il faudra reculer toutes leurs dénominations de l'intervalle $\Lambda-\lambda$, réduit en temps, savoir 54^m. La ligne CS, qui était méridienne, deviendra ainsi la ligne horaire de 54^m, avant ou après midi, et ainsi des autres.

Au surplus, comme cette manière de procéder aurait l'inconvénient de donner souvent des heures que l'on n'a pas coutume d'indiquer sur les cadrans, il sera plus convenable de tracer sur le cadran considéré comme horizontal des lignes horaires telles qu'en changeant les dénominations, ainsi qu'il vient d'être dit, elles se trouvent être celles des heures et de leurs divisions d'usage.

Venons présentement aux cadrans inclinés.

Faisons tourner le plan vertical BZC (fig. 5) autour de sa section BC avec l'horizon, pour lui donner une position oblique; l'azimuth ne changera pas; et, la droite OD supposée mobile, demeurant constamment perpendiculaire à notre plan, le point D décrira le cercle vertical DZ. Supposons que le mouvement angulaire du plan BZC soit tel que, quand il sera fixé dans sa nouvelle situation, le point D se trouve situé en Z′ (fig. 8); ce point Z′ sera ainsi le zénith du lieu pour lequel notre cadran incliné serait horizontal. Dans cet état de choses, l'angle Z′ZA sera toujours la déclinaison d; en outre, ZO, Z′O seront perpendiculaires l'un à l'horizon ADI et l'autre au cadran incliné; de sorte que l'angle ZOZ′ de ces deux droites sera celui des deux plans, ou l'inclinaison i du cadran; ainsi, $ZOZ'=ArcZZ'=i$. Le triangle sphérique Z′ZP aura, d'après cela, pour élémens $ZP=90°-l$, $Z'P=90°-L$, $ZPZ'=\Lambda-\lambda$, $ZZ'=i$, $Z'ZP=180°-d$; en conséquence, les équations qui nous ont déjà servi, dans le premier cas, deviendront, pour celui-ci,

$$\text{Sin}.L=\text{Cos}.i\,\text{Sin}.l-\text{Sin}.i\,\text{Cos}.l\,\text{Cos}.d\ ;$$

$$\text{Cos}.l\,\text{Cot}.i=\text{Sin}.d\,\text{Cot}.(\Lambda-\lambda)-\text{Sin}.l\,\text{Cos}.d\ ;$$

ce sont précisément les équations de la page 243 du tome VIII.ᵉ, desquelles il faudrait tirer les valeurs de L et $\Lambda-\lambda$, pour en faire le même usage que précédemment ; mais il est préférable de résoudre notre triangle sphérique, à l'aide des procédés qui rendent les formules finales propres au calcul par logarithmes (Voyez *Uranographie*, pag. 386); il vient ainsi

$$\text{Tang}.\varphi=\text{Cos}.d\,\text{Tang}.i\ ,$$

$$\text{Sin}.L=\frac{\text{Cos}.i\,\text{Sin}.(l-\varphi)}{\text{Cos}.\varphi}\ ,$$

$$\text{Tang}.(\Lambda-\lambda)=\frac{\text{Sin}.\varphi\,\text{Tang}.d}{\text{Cos}.(l-\varphi)}\ .$$

L'angle auxiliaire φ est donné par la première équation ; on trouve L par la seconde, et Λ par la troisième. L'usage de ces grandeurs est le même que ci-dessus ; mais il est nécessaire, avant tout, de donner au style la situation convenable.

Soient Z le zénith (fig. 7), P le pôle, ZPV le méridien, VE le plan incliné du cadran ; soient les arcs ZI, PO perpendiculaires à ce plan. Il est visible que l'angle Z en est l'azimuth $=90°-d$, que DI en est l'inclinaison i ; le point D est supposé sur la ligne de plus grande pente, V sur la méridienne, O sur la projection de l'axe, c'est-à-dire, sur la soustylaire ; l'arc PO est l'angle Z du style avec le cadran. Il s'agit donc, en premier lieu, de résoudre le triangle sphérique rectangle ZVD, où l'on connait $\text{ZD}=90°-i$ et $\text{Z}=90°-d$; on calcule le côté VD, qui est l'angle formé par la méridienne et la ligne de plus grande pente ; on calcule aussi l'angle V ; et l'on a, de cette manière,

Tang.

$$Tang.VD = \mathrm{Cot}.d\,\mathrm{Cos}.i\ , \qquad Cos V = \mathrm{Sin}.i\,\mathrm{Cos}.d\ .$$

Ensuite, dans le triangle rectangle VPO, on calcule VO, connaissant l'angle V et le côté $PO=L$; ce qui donne

$$Sin.VO = \mathrm{Tang}\, L\,\mathrm{Cot}.V.$$

Ces trois valeurs remplissent le but proposé.

En effet, après avoir tracé sur le plan incliné AC (fig. 9) une horizontale AB et sa perpendiculaire EF, ligne de plus grande pente; on mesurera les angles d et i; savoir, l'angle i que forme EF avec sa projection sur le plan horizontal, et l'angle OAB que forme AB avec une méridienne horizontale AO; ce qui donnera $d=90°-\mathrm{OAB}$. Ces valeurs introduites dans nos équations (Consultez les fig. 7, 8) font connaître,

1.° L et $\Lambda-\lambda$;

2.° L'angle VD que fait EF avec la méridienne F(XII); ce qui détermine la position de cette dernière ligne;

3.° L'angle V, qui sert ensuite à trouver VO, angle que fait la méridienne avec la soustylaire, et qu'on formera en GF (XII), à droite ou à gauche de F(XII), suivant le côté où le cadran décline.

Cela fait, sur FG, comme méridienne, et sa perpendiculaire FR comme ligne de VI heures, d'un cadran horizontal, pour la latitude L, on décrira ce cadran, à l'aide des échelles. Le proposé sera ainsi tracé, sauf à changer les dénominations des lignes horaires, à raison de 15° par heure de la difference $\Lambda-\lambda$ des longitudes réduites en temps, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus.

Je pense, Monsieur, et vous penserez sans doute comme moi, que ces développemens ne sont pas sans utilité, et qu'ils completent ce qu'on peut dire sur cette matière.

Agréez, etc.

Paris, le 16 de juillet 1818.