VECTEN

Géométrie élémentaire. Démonstration d'un théorème de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 202-204
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__202_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de géométrie ;

Par M. Vecten, licencié ès sciences, ancien professeur de mathématiques spéciales.

Théorème. Soit ABC (fig. 2) un triangle quelconque dans lequel soient menées les droites divisant les angles en deux parties égales, que l'on sait se couper en un même point O, et que nous supposons se terminer aux côtés respectivement opposés en D, E, F. Par les sommets soient menées des perpendiculaires à ces droites, rencontrant les prolongemens des côtés respectivement opposés en G, H, K. Sur DG, EH, FK comme diamètres soient décrits des cercles, dont les centres soient respectivement L, M, N.

1.° Les trois points G, H, K, seront en ligne droite ; 2.° les trois cercles passeront par les deux mêmes points P, Q ; d'où il suit 3.° que leurs trois centres L, M, N seront également en ligne droite.

Démonstration. Si l'on conçoit trois droites EF, FD, DE, que nous ne menons pas, pour ne point compliquer la figure, il est connu (*) qu'elles concourront avec les prolongemens des côtés BC, CA, AB, en trois points G, H, K, qui appartiendront à une même ligne droite, et l'on aura

(1) Voyez la page 296 de ce volume.

$$BD : CD :: BG : CG ,$$

$$CE : AE :: CH : AH ,$$

$$AF : BF :: AK : BK .$$

Mais si, sur DG comme diamètre, on décrit une circonférence, on sait que cette ligne est le lieu des sommets de tous les triangles qui ont pour base BC et qui sont tels que, si l'on tire du sommet de l'angle opposé à BC une droite au point D situé sur ce côté, cette ligne divisera l'angle d'où elle part en deux parties égales ; donc la circonférence décrite sur DG passera par le point A ; d'où il suit qu'en menant AG, cette ligne sera perpendiculaire sur AD. On démontrerait de même que les circonférences décrites sur EH, FK passent respectivement par les sommets B, C, et que les droites BH, CK sont respectivement perpendiculaires sur BE, CF. Or, nous avons rappelé plus haut que les trois points G, H, K sont en ligne droite ; la première partie du théorème se trouve donc ainsi démontrée.

Pour démontrer la seconde, nous allons d'abord supposer qu'on a décrit les deux circonférences DAG, EBH, se coupant en P, Q, et faire voir que la troisième FCK passe par ces deux mêmes points.

En effet, si l'on conçoit des droites PA, PB, PC, que nous sous-entendons, pour ne point trop compliquer la figure ; à cause que le point P est à la fois sur les deux circonférences DAG, EBH, on aura

$$BD : DC :: BP : PC , \qquad AE : EC :: AP : PC ,$$

d'où

$$AE \times DC : EC \times BD : AP :: BP ;$$

mais on a

$$AE \times DC \times BF = CE \times BD \times AF ,$$

ce qui revient à

$$AE \times DC : CE \times BD :: AF : BF ;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$AF : BF :: AP : BP ;$$

ce qui démontre que le point P est sur la troisième circonférence ; et on en dirait autant du point Q. La seconde partie du théorème se trouve donc également démontrée.

La droite qui joindrait les points P, Q serait donc une corde commune aux trois cercles ; la perpendiculaire sur son milieu contiendrait donc leurs centres ; ces centres sont donc en ligne droite, comme l'annonce la troisième partie du théorème.