ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

# Analise transcendante. Recherches d'analise, relatives au développement des fonctions

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 10 (1819-1820), p. 245-254
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__245_0>

# ANALISE TRANSCENDANTE.

## *Recherches d'analise, relatives au développement des fonctions ;*

Par M. Frédéric Sarrus, professeur de mathématiques au collége de Pezenas ;

Soit l'équation

$$x=\mathrm{f}(a\,,\,b\,,\,x)\ ,$$

et soient $U$, $V$ des fonctions entièrement arbitraires de $x$ sans $a$, $b$ ; on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}&=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\ ,\\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}b}&=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\ ;\end{aligned}\right\}\ (1)\qquad\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}&=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\ ,\\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}&=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}\ ;\end{aligned}\right\}\ (2)$$

les équations des deux couples donnent, par division ;

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}b}}\ ,\qquad\frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}}{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}}\ ;$$

et en égalant ces deux valeurs

$$\frac{dU}{da}\,\frac{dV}{db}=\frac{dU}{db}\,\frac{dV}{da}\ . \qquad (3)$$

L'on a encore

$$\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=V\frac{d^2U}{db\,da}+\frac{dV}{db}\,\frac{dU}{da}\ ;$$

$$\frac{d.V\frac{dU}{db}}{da}=V\frac{d^2U}{da\,db}+\frac{dV}{da}\,\frac{dU}{db}\ ;$$

mais, en vertu de l'équation (3),

$$V\frac{d^2U}{da\,db}=V\frac{d^2U}{db\,da}\ ,\quad \text{et}\quad \frac{dV}{db}\,\frac{dU}{da}=\frac{dV}{da}\,\frac{dU}{db}\ ;$$

donc finalement

$$\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.V\frac{dU}{db}}{da}\ ; \qquad (4)$$

et l'on aurait semblablement

$$\frac{d.U\frac{dV}{da}}{db}=\frac{d.U\frac{dV}{db}}{da}\ .$$

Si l'on avait

$$x=\mathrm{f}(a\,,b\,,x\,,x')\ ,\qquad x_1=\mathrm{f}_1(a_1\,,b_1\,,x\,,x_1)\ ;$$

et que $U$ , $V$ fussent des fonctions quelconques de $x$ , $x_1$ ; sans $a$ , $b$ , $a_1$ , $b_1$ ; on trouverait, comme dans ce qui précède ,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{da}\,\frac{dV}{db}&=\frac{dU}{db}\,\frac{dV}{da}\\ \frac{dU}{da'}\,\frac{dV}{db'}&=\frac{dU}{db'}\,\frac{dV}{da'}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

d'où on déduirait

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.V\dfrac{dU}{da}}{db}&=\frac{d.V\dfrac{dU}{db}}{da}\\ \frac{d.V\dfrac{dU}{da'}}{db'}&=\frac{d.V\dfrac{dU}{db'}}{da'}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

et aussi

$$\frac{d.U\dfrac{dV}{da}}{db}=\frac{d.U\dfrac{dV}{db}}{da}\ ;$$

$$\frac{d.U\dfrac{dV}{da'}}{db'}=\frac{d.U\dfrac{dV}{db'}}{da'}\ .$$

Les équations (4, 6) peuvent être utilement employées au développement de certaines fonctions. Soit, par exemple, $U$ à développer suivant les puissances de $b$, lorsque $x$ est donnée par l'équation

$$x=f(a+bz)\ ; \qquad (7)$$

$z$ désignant une fonction quelconque de $x$, sans $a$ ni $b$. Nous déduirons d'abord de l'équation (7)

$$\frac{dx}{da}=\left(1+b\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da}\right)f'(a+bz)\ ;$$

$f'$ désignant ici la fonction prime de $f$; cela donnera

$$\frac{dx}{da}=\frac{f'(a+bz)}{1-b\frac{dz}{dx}f'(a+bz)};$$

on trouverait de la même manière

$$\frac{dx}{db}=\frac{zf'(a+bz)}{1-b\frac{dz}{dx}f'(a+bz)}.$$

La comparaison de ces deux valeurs donne

$$\frac{dx}{db}=z\frac{dx}{da};$$

comparant ensuite ce résultat avec les équations (1), il viendra

$$\frac{dU}{db}=z\frac{dU}{da}; \qquad (8)$$

ce qui fera devenir l'équation (4)

$$\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.zV\frac{dU}{da}}{da}; \qquad (9)$$

changeant ensuite $V$ en $z^n$, on aura, pour ce cas particulier,

$$\frac{d.z^n\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.z^{n+1}\frac{dU}{da}}{da}. \qquad (10)$$

L'équation (8) donnera donc, en vertu de cette dernière,

$$\frac{d^2U}{db^2}=\frac{d.z\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.z^2\frac{dU}{da}}{da}$$

d'où on conclura, de la même manière,

$$\frac{d^3U}{db^3}=\frac{d^2.z^2\,\frac{dU}{da}}{da\,db}=\frac{d^2.z^3\,\frac{dU}{da}}{da^2}\ ;$$

et de celle-là

$$\frac{d^4U}{db^4}=\frac{d^3.z^3\,\frac{dU}{da}}{da^2db}=\frac{d^3.z^4\,\frac{dU}{da}}{da^3}\ ;$$

et ainsi de suite ; de manière qu'on aura, en général,

$$\frac{d^mU}{db^m}=\frac{d^{m-1}.z^m\,\frac{dU}{da}}{da^{m-1}}\ . \qquad (11)$$

Une fois parvenu à la formule (11), le développement de $U$, suivant les puissances de $b$ ne présente plus de difficulté.

Soit encore

$$x=f(a+bz)\ ; \qquad x_1=f_1(a_1+b_1z_1)\ ;$$

$z$, $z_1$ étant des fonctions quelconques de $x$, $x_1$ sans $a$, $b$, $a_1$, $b_1$. On trouvera, par la différentiation,

$$\frac{dx}{da}=\left(1+b\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da}+b\,\frac{dz}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da}\right)f'(a+bz)\ ;$$

$$\frac{dx_1}{da}=\left(b_1\frac{dz_1}{dx}\,\frac{dx}{da}+b_1\,\frac{dz_1}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da}\right)f'_1(a_1+b_1z_1)\ .$$

En posant, pour abréger,

$$k=\frac{b_1\,\frac{dz_1}{dx}\,f'_1(a_1+b_1z_1)}{1-b_1\,\frac{dz_1}{dx_1}\,f'_1(a_1+b_1z_1)}\ ,$$

la dernière de ces équations donne

$$\frac{dx_1}{da}=k\frac{dx}{da}\;;$$

d'où on conclut, au moyen de la première,

$$\frac{dx}{da}=\frac{f'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx}+k\frac{dz}{dx_1}\right)f'(a+bz)}\,,$$

On trouvera semblablement

$$\frac{dx_1}{db}=k\frac{dx}{db}\,,$$

$$\frac{dx}{db}=\frac{zf'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx}+k\frac{dz}{dx_1}\right)f'(a+bz)}\,.$$

Ces équations, comparées aux précédentes, donnent

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{db}&=z\frac{dx}{da}\,,\\ \frac{dx_1}{db}&=z\frac{dx_1}{da}\,.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

En suivant la marche qui a conduit à celles-ci, nous trouverons semblablement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{db_1}&=z_1\frac{dx}{da_1}\,,\\ \frac{dx_1}{db_1}&=z_1\frac{dx_1}{da_1}\,.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

En observant donc que

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dU}{dx_1}\frac{dx_1}{da},$$

$$\frac{dU}{db} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dU}{dx_1}\frac{dx_1}{db},$$

$$\frac{dU}{da_1} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{da_1} + \frac{dU}{dx_1}\frac{dx_1}{da_1},$$

$$\frac{dU}{db_1} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{db_1} + \frac{dU}{dx_1}\frac{dx_1}{db_1};$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{db} &= z\,\frac{dU}{da}, \\ \frac{dU}{db_1} &= z_1\,\frac{dU}{da_1}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Enfin, en suivant la marche qui nous a conduit des équations (4, 8) à la formule (11), nous parviendrons aux suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^mU}{db^m} &= \frac{d^{m-1}.z^m\,\frac{dU}{da}}{da^{m-1}}, \\ \frac{d^{m_1}U}{db_1^{m_1}} &= \frac{d^{m_1-1}z_1^{m_1}\,\frac{dU}{da_1}}{da_1^{m_1-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Pour compléter cette recherche, il faut parvenir à l'expression de

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^m db_1^{m_1}}.$$

Pour cela, soit

$$z^m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=\frac{\mathrm{d}.pU}{\mathrm{d}b}+\frac{\mathrm{d}.qU}{\mathrm{d}a}\,; \qquad (16)$$

$p$, $q$ étant des fonctions de $x$, $x_1$, satisfaisant, pour $U$, aux équations (15), du moins en ce qui concerne $p$. Avec cette restriction, l'on trouvera, en développant

$$z^m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=U\left(z\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}a}+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a}\right)+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}(zp+q)\,;$$

et, comme il suffit de satisfaire à cette equation, nous poserons

$$z\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}a}+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}a}=0\,,$$

$$zp+q=z^m\,;$$

différentiant la seconde par rapport à $a$, elle se réduira, en vertu de la première, à

$$p\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}=mz^{m-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}a}\,,\quad \text{d'où}\quad p=mz^{m-1}\,;$$

mettant cette valeur de $p$ dans la seconde des équations précédentes, on trouvera pour $q$

$$q=-(m-1)z^m\,;$$

et l'équation (16) deviendra

$$z^m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=m\frac{\mathrm{d}.z^{m-1}U}{\mathrm{d}b}-(m-1)\frac{\mathrm{d}.z^mU}{\mathrm{d}a}\,;$$

d'où on conclura

d$^m$,

$$\frac{d^{m_1}.z^m\frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}}=md.\frac{\frac{d^{m_1}.z^{m-1}U}{db_1^{m_1}}}{db}-(m-1)d.\frac{\frac{d^{m_1}.z^mU}{db_1^{m_1}}}{da};$$

mais, en vertu des équations (15), on a

$$\frac{d^{m_1}.z^{m-1}U}{db_1^{m_1}}=\frac{d^{m_1-1}.z_1^{m_1}\frac{d.z^{m-1}U}{da_1}}{da_1^{m_1-1}},$$

et encore

$$\frac{d^{m_1}.z^mU}{db_1^{m_1}}=\frac{d^{m_1-1}.z_1^{m_1}\frac{d.z^mU}{da_1}}{da_1^{m_1-1}};$$

ainsi l'on aura

$$\frac{d^{m_1}.z^m\frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}}=\frac{d^{m_1-1}\left(m\frac{d.z_1^{m_1}\frac{d.z^{m-1}U}{da_1}}{db}-(m-1)\frac{d.z_1^{m_1}\frac{d.z^mU}{da_1}}{da}\right)}{da_1^{m_1-1}};$$

en observant que la quantité dans les parenthèses peut être mise sous cette forme

$$z^mz_1^{m_1}\frac{d^2U}{dada_1}+z_1^{m_1}\frac{d.z^m}{da_1}\frac{dU}{da}+z^m\frac{d.z_1^{m_1}}{da}\frac{dU}{da_1},$$

il viendra finalement

$$\frac{d^{m_1}z^m\frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}}=\frac{d^{m_1-1}\left(z^mz_1^{m_1}\frac{d^2U}{dada_1}+z_1^{m_1}\frac{d.z^m}{da_1}\frac{dU}{da}+z_1^m\frac{d.z_1^{m_1}}{da}\frac{dU}{da_1}\right)}{da_1^{m_1}};$$

mais on a

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^mdb_1^{m_1}}=\frac{d^{m+m_1-1}.z^m\frac{dU}{da}}{da^{m-1}db_1^{m_1}};$$

partant

$$\frac{\mathrm{d}^{m+m_1}U}{\mathrm{d}b^m\mathrm{d}b_1{}^{m_1}}=\frac{\mathrm{d}^{m+m_1-2}.\left(z^m z_1{}^{m_1}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}a\mathrm{d}a_1}+z_1{}^{m_1}\frac{\mathrm{d}.z^m}{\mathrm{d}a_1}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}+z^m\frac{\mathrm{d}.z_1{}^{m_1}}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a_1}\right)}{\mathrm{d}a^{m-1}\mathrm{d}a_1{}^{m_1-1}}.\quad(17)$$

Une fois parvenus à la formule (17), le développement de $U$, suivant les puissances et produits des puissances de $b$, $b_1$ ne saurait plus offrir aucune difficulté.

Il est aisé de voir, d'après ce qui précède, ce qu'on aurait à faire, si, ayant les trois équations

$$x=\mathrm{f}\,(a+b\,z)\,,$$

$$x_1=\mathrm{f}_1(a_1+b_1z_1)\,,$$

$$x_2=\mathrm{f}_2(a_2+b_2z_2)\,;$$

où $z$, $z_1$, $z_2$ sont supposés des fonctions quelconques de $x$, $x_1$, $x_2$, sans $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, il s'agissait de développer $U$, suivant les puissances et produits de puissances de $b$, $b_1$, $b_2$; $U$ étant lui-même une fonction de $x$, $x_1$, $x_2$, sans $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$; et il en serait de même pour un plus grand nombre d'équations entre un pareil nombre de fonctions.

Nous terminerons par observer que M. Laplace était depuis longtemps parvenu à la formule (17) et à ses analogues; mais seulement dans la supposition où $b$, $b_1$ devaient, après les différentiations, être faits égaux à zéro; ce n'est même qu'en admettant cette hypothèse, que M. Lacroix est parvenu aux équations (14); voyez son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, deuxième édition, tom. I, pag. 281.