
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Analyse algébrique. Du développement des fractions rationnelles
composées en fractions partielles**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 255-271

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__255_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANALISE ALGÈBRIQUE.

Du développement des fractions rationnelles composées en fractions partielles ;

Par M. ***



1. CETTE matière a été traitée, avec beaucoup de soin et d'étendue, dans l'*Introductio in analysin infinitorum* d'EULER, et ensuite dans les *Institutiones calculi differentialis* du même auteur. Cependant, je ne crois pas que les méthodes consignées dans ces excellents ouvrages soient à la fois les plus faciles et les plus expéditives. Je vais en exposer une qui, à plusieurs égards, me paraît mériter la préférence.

Problème I.

2. Étant donné la fraction $\frac{1}{(1-ax+\beta x^2)^m}$, dans laquelle $1-ax+\beta x^2$ est le produit des deux facteurs inégaux $1-px$, $1-p'x$, on propose de la décomposer en cette suite de fractions partielles

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(1-px)^m} + \frac{B}{(1-px)^{m-1}} + \frac{C}{(1-px)^{m-2}} + \dots + \frac{Z}{1-px} \\ & + \frac{A'}{(1-p'x)^m} + \frac{B'}{(1-p'x)^{m-1}} + \frac{C'}{(1-p'x)^{m-2}} + \dots + \frac{Z'}{1-p'x} ? \end{aligned}$$

Je fais

$$1 - px = \omega, \text{ d'où } x = \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p};$$

et par conséquent

$$1 - \alpha x + \beta x^2 = \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{2\beta}{p^2} \right) \omega + \frac{\beta}{p^2} \omega^2 = a\omega + b\omega^2,$$

en posant, pour abrégier,

$$a = \frac{\alpha}{p} - \frac{2\beta}{p^2}, \quad b = \frac{\beta}{p^2}.$$

Donc la fraction proposée

$$\frac{1}{(1 - \alpha x + \beta x^2)^m} = \frac{1}{\omega^m (a + b\omega)^m}.$$

Mais, en ordonnant la suite qui résulte de cette fraction par rapport à $\frac{1}{\omega}$, comme il conviendrait dans l'hypothèse de ω infiniment petit, il est clair que les m premiers termes de la suite ainsi ordonnée seraient $\frac{A}{\omega^m} + \frac{B}{\omega^{m-1}} + \frac{C}{\omega^{m-2}} + \dots + \frac{Z}{\omega}$; puisque le développement des autres parties $\frac{A'}{(1+p/x)^m} + \frac{B'}{(1+p/x)^{m-1}} + \dots$, ne peut donner aucune puissance négative de ω ; donc les m termes

$$\frac{A}{\omega^m} + \frac{B}{\omega^{m-1}} + \frac{C}{\omega^{m-2}} + \dots + \frac{Z}{\omega},$$

sont précisément les m premiers termes que fournira le développement de l'expression $\frac{1}{\omega^m (a + b\omega)^m}$.

Mais on a

$$\frac{1}{(a+bx)^m} = \frac{1}{a^m} \left(1 - \frac{m}{1} \frac{b}{a} x + \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{m+2}{3} \frac{b^3}{a^3} x^3 + \dots \right)$$

donc

$$A = \frac{1}{a^m}, \quad B = -\frac{m}{1} \frac{b}{a} A, \quad C = \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b^2}{a^2} A, \dots,$$

jusqu'à ce qu'on ait m de ces quantités.

En opérant semblablement sur l'autre facteur $1-p'x$, et faisant.

$$a' = \frac{\alpha}{p'} - \frac{2\beta}{p'^2}, \quad b' = \frac{\beta}{p'^2},$$

la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x + \beta x^2)^m}$ se trouvera décomposée en ces deux suites

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^m} \left\{ \frac{1}{(1-px)^m} - \frac{m}{1} \frac{b}{a} \frac{1}{(1-px)^{m-1}} + \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{(1-px)^{m-2}} - \dots \right\} \\ & + \frac{1}{a'^m} \left\{ \frac{1}{(1-p'x)^m} - \frac{m}{1} \frac{b'}{a'} \frac{1}{(1-p'x)^{m-1}} + \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b'^2}{a'^2} \frac{1}{(1-p'x)^{m-2}} - \dots \right\} \end{aligned}$$

dont chacune doit avoir m termes.

Puisque $\alpha = p+p'$ et $\beta = pp'$, les quantités a, b, a', b' peuvent s'exprimer par le moyen de p et p' seulement; ainsi on aura

$$a = \frac{p-p'}{p}, \quad \frac{b}{a} = \frac{p'}{p-p'}, \quad a' = \frac{p'-p}{p'}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{p}{p'-p}.$$

3. Si l'on suppose que le développement de la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x + \beta x^2)^m}$ donne la suite récurrente

$$1 + \theta'x + \theta''x^2 + \theta'''x^3 + \dots + \theta^{(n)}x^n + \dots;$$

pour en avoir le terme général $\theta^{(n)}$, on fera, pour abrégé,

$$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdots \frac{n+m-1}{m-1} = V^m,$$

$$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdots \frac{n+m-2}{m-2} = V^{m-1},$$

..... ;

et le terme général demandé sera

$$V^{(n)} = \frac{p^n}{a^m} \left\{ V^m - \frac{m}{1} \frac{b}{a} V^{m-1} + \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b^2}{a^2} V^{m-2} - \dots \right\}$$

$$+ \frac{p^{ln}}{a^m} \left\{ V^m - \frac{m}{1} \frac{b'}{a'} V^{m-1} + \frac{m}{1} \frac{m+1}{2} \frac{b'^2}{a'^2} V^{m-2} - \dots \right\}.$$

4. Si les facteurs de $1 - \alpha x + \beta x^2$ sont imaginaires, on les représentera par $1 - f(\text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi)x$ et $1 - f(\text{Cos.}\varphi - \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi)x$; et, comme on peut prendre $f=1$ sans que le calcul en soit moins général, on aura

$$p = \text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi,$$

$$p' = \text{Cos.}\varphi - \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi;$$

mais, alors $\alpha = 2\text{Cos.}\varphi$, $\beta = 1$; donc

$$a = 2\text{Sin.}\varphi \sqrt{-1} (\text{Cos.}\varphi - \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi),$$

$$b = \text{Cos.}2\varphi - \sqrt{-1}\text{Sin.}2\varphi,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi}{2\text{Sin.}\varphi \sqrt{-1}} = \frac{\text{Cos.}(90^\circ - \varphi) - \sqrt{-1}\text{Sin.}(90^\circ - \varphi)}{2\text{Sin.}\varphi} ;$$

On aura semblablement a' , b' , en changeant le signe de $\sqrt{-1}$;

donc , la suite qui vient du développement de la fraction

$\frac{1}{(1-2x\cos\phi+x^2)^m}$ a pour terme général

$$\begin{aligned} \xi^{(n)} = & \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m-1}{m-1} \cdot \frac{\text{Cos.}[(m+n)\phi - m \cdot 90^\circ]}{2^{m-1} \text{Sin.}^m \phi} \\ & - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m-2}{m-2} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{\text{Cos.}[(m+n-1)\phi - (m+1) \cdot 90^\circ]}{2^m \text{Sin.}^{m+1} \phi} \\ & + \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m-3}{m-3} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{\text{Cos.}[(m+n-2)\phi - (m+2) \cdot 90^\circ]}{2^{m+1} \text{Sin.}^{m+1} \phi} \\ & - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \dots \frac{n+m-4}{m-4} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdot \frac{\text{Cos.}[(m+n-3)\phi - (m+3) \cdot 90^\circ]}{2^{m+2} \text{Sin.}^{m+3} \phi} \\ & + \dots \end{aligned}$$

en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait m termes.

5. On peut simplifier cette formule , en réduisant des termes au même dénominateur ; alors elle devient , après plusieurs réductions

$$\begin{aligned} \phi^{(n)} = & \frac{n+m+1}{1} \cdot \frac{n+m+2}{2} \cdot \frac{n+m+3}{3} \cdot \frac{n+m+4}{4} \dots \frac{n-2m-1}{m-1} \cdot \frac{\text{Sin.}(n+1)\phi}{2^{2m-2} \text{Sin.}^{2m-1} \phi} \\ & - \frac{m-1}{1} \cdot \frac{n+m+2}{2} \cdot \frac{n+m+3}{3} \cdot \frac{n+m+4}{4} \dots \frac{n-2m-1}{m-1} \cdot \frac{\text{Sin.}(n+3)\phi}{2^{2m-2} \text{Sin.}^{2m-1} \phi} \\ & + \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{n+m+3}{3} \cdot \frac{n+m+4}{4} \dots \frac{n-2m-1}{m-1} \cdot \frac{\text{Sin.}(n+5)\phi}{2^{2m-2} \text{Sin.}^{2m-1} \phi} \\ & - \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{n+m+4}{4} \dots \frac{n-2m-1}{m-1} \cdot \frac{\text{Sin.}(n+7)\phi}{2^{2m-2} \text{Sin.}^{2m-1} \phi} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Euler a démontré cette formule pour quelques cas particuliers, dans son *Introduction*.

Problème. II.

6. Décomposer la fraction $\frac{1}{(1-ax+\beta x^2-\gamma x^3)^m}$ en cette suite de fractions simples

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(1-px)^m} + \frac{B}{(1-px)^{m-1}} + \frac{C}{(1-px)^{m-2}} + \dots + \frac{Z}{1-px} \\ & + \frac{A'}{(1-p'x)^m} + \frac{B'}{(1-p'x)^{m-1}} + \frac{C'}{(1-p'x)^{m-2}} + \dots + \frac{Z'}{1-p'x} \\ & + \frac{A''}{(1-p''x)^m} + \frac{B''}{(1-p''x)^{m-1}} + \frac{C''}{(1-p''x)^{m-2}} + \dots + \frac{Z''}{1-p''x} ; \end{aligned}$$

en supposant que $1-px$, $1-p'x$, $1-p''x$ sont les trois facteurs inégaux de $1-ax+\beta x^2-\gamma x^3$?

Soit $1-px=0$, d'où $x = \frac{1-a}{p}$; en posant pour abrégé

$$\frac{a}{p} - \frac{2\beta}{p^2} + \frac{3\gamma}{p^3} = a,$$

$$\frac{\beta}{p^2} - \frac{3\gamma}{p^3} = b,$$

$$\frac{\gamma}{p^3} = c,$$

la quantité $1-ax+\beta x^2-\gamma x^3$ deviendra $a\omega + b\omega^2 + c\omega^3$. Mais, en regardant ω comme infiniment petit, les seuls termes infinis qui résultent de la fraction proposée sont

A

$$\frac{A}{a^m} + \frac{B}{a^{m-1}} + \dots + \frac{Z}{a} ;$$

Ces mêmes termes se tireront de l'expression $\frac{1}{a^m(a+b\omega+c\omega^2)^m}$ développée jusqu'au m^{m^e} terme, et par conséquent on aura

$$\frac{1}{(a+b\omega+c\omega^2)^m} = A+B\omega+C\omega^2+\dots+Z\omega^{m-1} ;$$

égalité vraie, en développant le premier membre jusqu'à la puissance $m-1$ de ω seulement.

On aura donc

$$A = \frac{1}{a^m} ,$$

$$B = - \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a} A ,$$

$$C = + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} A - \frac{m}{1} \cdot \frac{c}{a} A ,$$

$$D = - \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} A + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2bc}{a^2} A ;$$

.....

D'ailleurs, le terme général des quantités A, B, C, D, \dots est assignable; car, au lieu de la suite $\frac{A}{a^m} + \frac{B}{a^{m-1}} + \frac{C}{a^{m-2}} + \dots$, soit pris, pour plus de simplicité, $\frac{A}{a^m} (1 - T'\omega + T''\omega^2 - T'''\omega^3 + \dots)$; et on aura $T^{(k)}$, c'est-à-dire, le terme qu'on voudra; dans la suite T', T'', T''', \dots exprimé de cette manière,

$$\begin{aligned}
T^{(k)} &= \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \dots \dots \dots \frac{m+k-1}{k} \cdot \frac{bk}{a^k} \\
&- \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \dots \dots \dots \frac{m+k-2}{k-1} \cdot \frac{k-1}{1} \cdot \frac{bk-2c}{a^{k-1}} \\
&+ \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \dots \dots \dots \frac{m+k-3}{k-2} \cdot \frac{k-2}{1} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot \frac{bk-4c^2}{a^{k-2}} \\
&- \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \dots \dots \dots \frac{m+k-4}{k-3} \cdot \frac{k-3}{1} \cdot \frac{k-4}{2} \cdot \frac{k-5}{3} \cdot \frac{bk-6c^3}{a^{k-3}} \\
&+ \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Si, relativement aux autres racines p' , p'' , on fait les mêmes opérations, et que les quantités analogues à $T^{(k)}$ soient $S^{(k)}$ et $V^{(k)}$, la fraction proposée se changera en ces trois suites de fractions simples

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^m} \left\{ \frac{1}{(1-px)^m} - \frac{T'}{(1-px)^{m-1}} + \frac{T''}{(1-px)^{m-2}} - \frac{T'''}{(1-px)^{m-3}} + \dots \right\} \\
&+ \frac{1}{a'^m} \left\{ \frac{1}{(1-p'x)^m} - \frac{S'}{(1-p'x)^{m-1}} + \frac{S''}{(1-p'x)^{m-2}} - \frac{S'''}{(1-p'x)^{m-3}} + \dots \right\} \\
&+ \frac{1}{a''^m} \left\{ \frac{1}{(1-p''x)^m} - \frac{V'}{(1-p''x)^{m-1}} + \frac{V''}{(1-p''x)^{m-2}} - \frac{V'''}{(1-p''x)^{m-3}} + \dots \right\}
\end{aligned}$$

Au lieu de déduire les quantités T' , T'' , T''' , et leurs analogues de la loi générale exposée ci-dessus, on pourra, si l'on veut, les tirer du développement de la fraction $\frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a}\omega + \frac{c}{a}\omega^2\right)^m}$, qui doit donner $1 - T'\omega + T''\omega^2 - T'''\omega^3 + \dots$, jusqu'au m^{me} terme inclusi-

vement; de sorte que, dans ce développement, on pourra négliger ω^m et les puissances supérieures de ω .

8. Si la quantité $1 - ax + \varepsilon x^2 - \gamma x^3$ avait deux facteurs égaux $1 - px$, $1 - p'x$, la quantité a serait zéro; et en faisant toujours $1 - px = \omega$, on aurait à développer $\frac{1}{\omega^{2m}(b + c\omega)^m}$, ce qui donnerait

$$\frac{1}{b^m} \left(\frac{1}{\omega^{2m}} - \frac{m}{1} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\omega^{2m-1}} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{1}{\omega^{2m-2}} - \dots \right);$$

et il faudrait prendre $2m$ termes de cette suite.

Quant au troisième facteur $1 - p''x$, on pourrait opérer comme dans le cas général; mais, comme alors $a'' + b''\omega + c''\omega^2$ ne peut manquer d'être un carré, le résultat doit être fort simple.

Pour y parvenir directement, je considère la quantité $\frac{1}{(1-fx)^2m(1-gx)^m}$ ou, plus généralement, $\frac{1}{(1-fx)^n(1-gx)^m}$. Je fais $1 - fx = \omega$, elle devient $\frac{f^m}{(f-g)^m \omega^n \left(1 + \frac{g}{f-g} \omega\right)^m}$, d'où résulte la suite

$$\frac{f^m}{(f-g)^m} \left\{ \frac{1}{(1-fx)^n} - \frac{m}{1} \cdot \frac{g}{(f-g)(1-fx)^{n+1}} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{g^2}{(f-g)^2(1-fx)^{n+2}} - \dots \right\}$$

dont il faut prendre n termes.

Supposons ensuite $1 - gx = \varphi$; on aura une pareille suite pour l'autre facteur, et l'expression proposée $\frac{1}{(1-fx)^n(1-gx)^m}$ se partagera en ces deux suites

$$\frac{f^m}{(f-g)^m} \left\{ \frac{1}{(1-fx)^n} - \frac{m}{1} \cdot \frac{g}{(f-g)(1-fx)^{n+1}} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{g^2}{(f-g)^2(1-fx)^{n+2}} - \dots \right\}$$

$$+ \frac{g^n}{(g-f)^n} \left\{ \frac{1}{(1-gx)^m} - \frac{n}{1} \cdot \frac{f}{(g-f)(1-gx)^{m+1}} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{f^2}{(g-f)^2(1-gx)^{m+2}} - \dots \right\}$$

la première devant avoir n termes et la seconde m .

Problème III.

9. En général, soit la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, dans laquelle le plus grand exposant de x dans le dénominateur soit plus grand que dans le numérateur. Soit $(1-px)^m$ un facteur de Q ; on demande les fractions partielles qui en résultent ?

En représentant ces fractions par

$$\frac{A}{(1-px)^m} + \frac{B}{(1-px)^{m-1}} + \frac{C}{(1-px)^{m-2}} + \dots + \frac{Z}{1-px},$$

je ferai, à l'ordinaire, $1-px = \omega$, et la fraction $\frac{P}{Q}$ deviendra de cette forme

$$\frac{a + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3 + \dots}{\omega^m (a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + \dots)};$$

je développerai en série la fraction

$$\frac{a + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \delta\omega^3 + \dots}{a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + \dots},$$

ce qui me donnera

$$A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + \dots + Z\omega^{m-1},$$

en sorte que je n'aurai besoin que des m premiers termes de cette suite, et que je pourrai négliger, dans mon calcul, les $\omega^m, \omega^{m+1}, \dots$, à mesure qu'ils se présenteront.

Je ferai un calcul semblable sur les autres facteurs du dénominateur Q , et ma fraction sera décomposée avec le moins de travail possible.

10. *Exemple I.* Soit proposé de décomposer la fraction

$$\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2(1+2x)^3}.$$

1.° Relativement au facteur x^3 , il n'est pas nécessaire de faire $x = \omega$; on peut développer $\frac{1-2x+3x^2}{(1-x)^2(1+2x)^3}$, jusqu'aux x^2 inclusive-ment; en rejetant les x^3 , son dénominateur se réduit à $1+4x+x^2$, et l'on a

$$\frac{1-2x+3x^2}{1+4x+x^2} = 1-6x+26x^2;$$

en se bornant à trois termes; donc les fractions partielles qui résultent du facteur x^3 sont

$$\frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{26}{x}.$$

2.° Soit $1-x = \omega$, ou $x = 1-\omega$, la fraction $\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1+2x)^3}$ étant calculée en rejetant les ω^2 donnera

$$\frac{2-4\omega}{27(1-5\omega)} = \frac{2}{27}(1+3\omega);$$

donc les fractions partielles qui résultent du facteur $(1-x)^2$ sont

$$\frac{2}{27} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

3.° Si l'on fait enfin $1+2x = \omega$, d'où $x = -\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}$; la fraction $\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2}$ deviendra, en rejetant les ω^3

$$-\frac{8(11-10)\omega+3\omega^2}{9-33\omega+46\omega^2} = -\frac{8}{9} \left(11 + \frac{91}{3}\omega + 58\omega^2 \right);$$

donc le facteur $(1+2x)^3$ donnera les fractions partielles

$$-\frac{88}{9} \cdot \frac{1}{(1+2x)^3} - \frac{728}{27} \cdot \frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{464}{9} \cdot \frac{1}{1+2x}.$$

Rassemblant donc ces trois résultats, on aura

$$\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2(1+2x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{26}{x} + \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$-\frac{88}{9} \cdot \frac{1}{(1+2x)^3} - \frac{728}{27} \cdot \frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{464}{27} \cdot \frac{1}{1+2x}.$$

Exemple 2. Soit proposé de décomposer en fractions partielles la fraction

$$\frac{x^{m-1}}{1-2a^n x^n \cos \theta + a^{2n} x^{2n}} ?$$

(Voyez cet exemple à la fin du *Calcul différentiel* d'EULER.)

Si l'on appelle π l'arc de 180° , et qu'on prenne

$$\varphi = \frac{2k\pi \pm \theta}{n},$$

k étant un entier ; un facteur quelconque du dénominateur sera $1-ax(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi)$. Soit donc

$$1-ax(\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi) = \omega,$$

ou

$$x = \frac{\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi}{a} - \frac{\omega}{a} (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi);$$

comme il n'y a point de facteurs égaux, il suffira d'avoir, dans le numérateur, le terme constant, et dans le dénominateur celui qui est affecté de ω au premier degré. On aura donc

$$\frac{x^{m-1}}{1-2a^n x^n \text{Cos.}\theta + a^{2n} x^{2n}} = \frac{1}{a^{m-1}} \cdot \frac{\text{Cos.}(m-1)\phi - \sqrt{-1}\text{Sin.}(m-1)\phi}{2n\omega(\text{Cos.}n\phi - \sqrt{-1}\text{Sin.}n\phi) - 2n\omega(\text{Cos.}2n\phi - \sqrt{-1}\text{Sin.}2n\phi)}$$

Mais, à cause de $\text{Cos.}n\phi = \text{Cos.}\theta$ et $\text{Sin.}n\phi = \pm \text{Sin.}\theta$, cette expression devient

$$+ \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{-\sqrt{-1}\text{Cos.}(m-n-1)\phi - \text{Sin.}(m-n-1)\phi}{1-ax(\text{Cos.}\phi + \sqrt{-1}\text{Sin.}\phi)} ;$$

C'est la fraction partielle demandée. Elle ne peut manquer d'être accompagnée de la fraction

$$+ \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{+\sqrt{-1}\text{Cos.}(m-n-1)\phi - \text{Sin.}(m-n-1)\phi}{1-\text{Cos.}ax(\phi - \sqrt{-1}\text{Sin.}\phi)} ;$$

la somme des deux donnera la fraction réelle

$$+ \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{ax\text{Sin.}(m-n)\phi - \text{Sin.}(m-n-1)\phi}{1-2ax\text{Cos.}\phi + a^2x^2} ;$$

quant au signe ambigu, il est relatif à celui de θ dans la valeur

$$\phi = \frac{2k\pi \pm \theta}{n} .$$

Si l'on donne à k les valeurs successives 0, 1, 2, ..., jusqu'à ce qu'on ait n de ces fractions, leur somme sera égale à la fraction proposée.

Problème. IV.

12. Soit $(1-ax+\beta x^2)^n$ un facteur du dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$; on propose de trouver directement les fractions partielles

$$\frac{A+Bx}{(1-ax+\beta x^2)^n} + \frac{A'+B'x}{(1-ax+\beta x^2)^{n-1}} + \frac{A''+B''x}{(1-ax+\beta x^2)^{n-2}} + \dots$$

sans être obligé de se servir des facteurs réels ou imaginaires de $1 - \alpha x + \beta x^2$?

Je ferai $1 - \alpha x + \beta x^2 = \omega$, ou $x^2 = \frac{-1 + \alpha x + \omega}{\beta}$. Éliminant ; au moyen de cette équation, toutes les puissances de x supérieures à la première, j'aurai

$$\frac{P}{Q} = \frac{M + Nx}{\omega^n(F + Gx)},$$

dans laquelle M , N , F , G ne contiendront point d' x . On éliminera x absolument du dénominateur, en multipliant les deux termes de la fraction par $\mu + \nu x$, et prenant

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha C - 3F}{\beta^2};$$

on aura ainsi

$$\frac{P}{Q} = \frac{M' + N'x}{\omega^n R'}.$$

Faisant ensuite

$$\frac{M'}{R'} = A + A'\omega + A''\omega^2 + \dots$$

$$\frac{N'}{R'} = B + B'\omega + B''\omega^2 + \dots$$

on aura les coefficients cherchés A , B , A' , B' ,

13. *Exemple I.* Il s'agit de décomposer la fraction

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(1-x+x^2)} ?$$

1.° Soit $1+x^2 = \omega$; la fraction devient

$$\frac{1}{\omega^2(\omega-x)}.$$

Pour

Pour chasser tout-à-fait les x du dénominateur de $\frac{1}{\omega-x}$, je multiplie les deux termes par $\omega+x$, et j'ai

$$\frac{\omega+x}{1-\omega+x^2} \quad \text{ou simplement} \quad \frac{\omega+x}{1-\omega},$$

parce que ω^2 est inutile. Or, en rejetant toujours les ω^2 ,

$$\frac{\omega+x}{1-\omega} = \omega+x(1+\omega);$$

donc le facteur $(1+x^2)^2$ donne les fractions partielles

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{x+1}{1+x^2};$$

2.^o Soit $1-x+x^2=\omega$, ou $x^2=\omega-1+x$; la fraction proposée deviendra $\frac{1}{\omega(\omega+x)^2}$ ou simplement $\frac{1}{\omega(-1+x)}$. Maintenant $\frac{1}{-1+x} = \frac{x}{-1+\omega} = -x$; donc la fraction partielle qui résulte du facteur $1-x+x^2$ est $-\frac{x}{1-x+x^2}$, et par conséquent

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(1-x+x^2)} = \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{x+1}{1+x^2} - \frac{x}{1-x+x^2}.$$

14. *Exemple II.* Décomposer l'expression $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$ en fractions partielles ?

Les facteurs de $1+4x^4$ sont $1+2x+2x^2$ et $1-2x+2x^2$. Soit $1+2x+2x^2=\omega$, on aura $\frac{1}{(1+4x^4)^3} = \frac{1}{\omega^3(\omega+4x)^3}$. Maintenant si, dans la quantité $\frac{1}{(\omega+4x)^3}$, on rejette les ω^3 , et qu'on élimine les puissances de x supérieures à la première, on aura

$$\frac{1}{4[(8+20\omega+3\omega^2)x+8-2\omega-6\omega^2]}.$$

Pour chasser les x du dénominateur, je trouve qu'il faut multiplier les deux termes par $(8+20\omega+3\omega^2)x+22\omega+9\omega^2$; alors cette fraction devient

$$\frac{(8+20\omega+3\omega^2)x+22\omega+9\omega^2}{16(8-12\omega+9\omega^2)} = \frac{x}{16} \left(1+4\omega+\frac{21}{4}\omega^2 \right) + \frac{11\omega+21\omega^2}{64};$$

donc le facteur $(1+2x+2x^2)^3$ donne les fractions partielles

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{x}{(1+2x+2x^2)^3} + \frac{11+16x}{64(1+2x+2x^2)^2} + \frac{21+21x}{64(1+2x+2x^2)}.$$

L'autre facteur donnera pareillement, en changeant le signe de x ,

$$-\frac{1}{16} \cdot \frac{x}{(1-2x+2x^2)^3} + \frac{11-16x}{64(1-2x+2x^2)^2} + \frac{21-21x}{64(1-2x+2x^2)};$$

et ces six fractions équivaldront à la fraction proposée $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$.

Remarque. Si, après avoir décomposé la fraction $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$, dont le numérateur est 1, on proposait une fraction semblable $\frac{1+8x^6}{(1+4x^4)^3}$, dont le numérateur fût à volonté; on pourrait, sans recommencer le calcul, multiplier les parties trouvées par la valeur du numérateur. Ainsi, on trouverait pour $1+8x^6$ l'expression

$$1-5\omega+3\omega^2+(2-4\omega-6\omega^2)x,$$

par laquelle multipliant ce que nous avons déjà trouvé

$$\frac{x}{16} \left(1+4\omega+\frac{21}{4}\omega^2 \right) + \frac{11\omega+21\omega^2}{64},$$

le produit serait

$$\frac{(9+9a^2)x-2+9a+9a^3}{32};$$

donc la fraction proposée $\frac{1+8x^6}{(1+5x^4)^3}$ équivaut à la somme de celles-ci

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{32(1+2x+2x^2)^3} + \frac{9(1+x)}{32(1+2x+2x^2)^2} + \frac{9(1+x)}{32(1+2x+2x^2)} \\ & -\frac{2}{32(1-2x+2x^2)^3} + \frac{9(1-x)}{32(1-2x+2x^2)^2} + \frac{9(1-x)}{32(1-2x+2x^2)}. \quad (*) \end{aligned}$$

(*) On trouve, à la page 279 du III.^e volume de ce recueil, un mémoire sur le même sujet, par M. de Stainville qui l'a reproduit, avec quelques modifications, à la page 556 de ses *Mélanges d'analyse et de géométrie*. (In-8.^o, Paris, veuve Courcier, 1815.)