ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS
VECTEN
A. OLLIVE

Solutions du problème d'analise indéterminée proposé à la page 244 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 385-387
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__385_1>

Solutions du problème d'analise indéterminée proposé à la page 244 du présent volume;

Par MM. Frédéric Sarrus,
Vecten, licencié ès sciences.
A. Ollive, licencié ès lettres,
Et un Abonné.

PROBLÈME. Quelles sont les valeurs entières les plus générales de x *et* y *qui rendent entière la fonction* $\frac{xy}{x+y}$?

Soit δ, dit M. Sarrus, le plus grand commun diviseur de x et y, de telle sorte qu'on ait $x=p\delta$, $y=q\delta$, p et q étant deux nombres entiers premiers entre eux, on aura

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{pq\delta}{p+q};$$

p et q étant premiers entre eux, devront l'être également avec $p+q$; il sera donc nécessaire, et en même temps il suffira, pour que la fonction soit entière, que δ soit divisible par $p+q$; on devra donc avoir $\delta=(p+q)r$, r étant un nombre entier quelconque; on aura donc ainsi, pour les valeurs cherchées de x et de y,

$$x=pr(p+q)\ , \qquad y=qr(p+q)\ ;$$

au moyen de quoi on aura, en effet,

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{pqr^2(p+q)^2}{r(p+q)^2}=pqr\ ,$$

nombre entier, pourvu qu'on prenne des nombres entiers pour p, q, r.

M. Vecten est exactement parvenu à la même formule ; mais nous ignorons de quelles considerations il l'a déduite.

Par les procédés ordinaires de l'analise indéterminée, M. A. Ollive est tombé sur des valeurs de la forme

$$x=2gr(g+h)\ , \qquad y=2gr(g-h)\ .$$

Ces formules rentrent exactement dans les précédentes ; en posant, en effet,

$$g+h=p\ , \qquad g-h=q\ ,$$

il vient

$$2g=p+q\ ;$$

ce qui donne, en substituant,

$$x=pr(p+q)\ ; \qquad y=qr(p+q)\ ;$$

comme ci-dessus.

Un Abonné s'est borné à considérer l'équation identique

$$pqr=\frac{pqr^2(p+q)^2}{r(p+q)^2}=\frac{pr(p+q)\times qr(p+q)}{pr(p+q)+qr(p+q)}\ ,$$

en observant que si, dans le dernier membre, on remplaçait $pr(p+q)$, $qr(p+q)$ respectivement par x et y, ce dernier membre devenait $\frac{xy}{x+y}$.

M. Ollive observe que, si l'on veut rendre $\frac{xy}{x+y}$ égal à un nombre entier donné, il suffira de décomposer ce nombre entier en trois facteurs, ce qui est toujours possible, dût-on prendre deux de ces facteurs égaux à l'unité; on prendra ensuite ces trois facteurs pour p, q, r.

Il suit de là que dans le cas même où le nombre entier donné serait un nombre premier P, le problème serait encore susceptible de deux solutions, suivant que l'on ferait r ou bien l'un des deux nombres p et q égaux à ce nombre premier P; les valeurs de x et y seraient, dans le premier cas,

$$2P\,, \qquad 2P\,;$$

et dans le second

$$P(P+1)\,; \qquad P+1\,.$$

On peut, au surplus, remarquer qu'il est impossible que x et y soient tous deux impairs, puisqu'alors xy étant impair ne pourrait être divisé par $x+y$, qui serait nécessairement un nombre pair : c'est une observation qui n'a pas échappé à M. Ollive.