ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

# Questions résolues. Développement de la théorie sur laquelle il a été demandé des éclaircissemens à la page 291 du IX.e volume de ce recueil

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 10 (1819-1820), p. 61-72
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__61_0>

# QUESTIONS RÉSOLUES.

*Développement de la théorie sur laquelle il a été demandé des éclaircissemens à la page 291 du IX.e volume de ce recueil ;*

Par M. Bérard, professeur de mathématiques, membre de plusieurs sociétés savantes.

Je rappelle l'énoncé du problème, parce que j'ai besoin de modifier un peu le procédé qui y est expliqué.

Soit $X=0$ une équation numérique en $x$, du degré $m$ ; soit $l_0$ la limite inférieure des racines positives de cette équation ; soit changé, dans $X=0$, $x$ en $x+l_0$, ce qui donnera une transformée $X_1=0$.

Soit $l_1$ la limite inférieure des racines positives de cette dernière équation ; en y changeant $x$ en $x+l_1$, ou bien en changeant, dans $X=0$, $x$ en $x+l_0+l_1$, ce qui revient au même, et ce qui est préférable, comme on le verra tout-à-l'heure ; on obtiendra une nouvelle transformée $X_2=0$.

Soit $l_2$ la limite inférieure des racines positives de celle-ci ; en changeant, dans $X=0$, $x$ en $x+l_0+l_1+l_2$ ; on obtiendra une troisième transformée $X_3=0$.

En supposant que ce procédé ait été indéfiniment poursuivi de la même manière, on propose,

1.° De démontrer que, si la proposée $X=0$ a une ou plusieurs racines réelles positives, la série $l_0+l_1+l_2+\ldots\ldots$ sera convergente, et aura pour limite de la somme de ses termes la plus petite de ces racines?

2.° D'expliquer ce que devient cette même série, dans le cas où la proposée, n'ayant aucune racine réelle positive, offre néanmoins une ou plusieurs variations?

## §. I. *Première partie.*

Soit la proposée

$$X=0=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots\ldots\ldots+x^m$$

en y changeant $x$ en $x+l$; et posant, pour abréger,

$$A=a+bl+cl^2+dl^3+el^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+l^m\ ,$$

$$B=b+2cl+3dl^2+4el^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m}{1}l^{m-1},$$

$$C=c+3dl+6el^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}l^{m-2},$$

$$D=d+4el+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}l^{m-3},$$

$$E=e+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}l^{m-4},$$

ce qui donne, comme l'on sait,

$$B=\frac{dA}{dl}\ ,\quad C=\frac{dB}{2dl}\ ,\quad D=\frac{dC}{3dl}\ ,\quad E=\frac{dD}{4dl}\ ,\ldots\ldots;$$

elle deviendra

$$X_n=0=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots\ldots+x^m\ .$$

En mettant donc dans les valeurs de $A$, $B$, $C$,......; les nombres que représentent $a$, $b$, $c$,......; il devient très-aisé de former les différentes transformées ; car il suffit d'y substituer successivement pour $l$, les valeurs $l_0$, $l_0+l_1$, $l_0+l_1+l_2$,......... des sommes de limites obtenues au moyen des transformées qui qui précèdent celles qu'on se propose d'obtenir.

La première recherche qui doit nous occuper ici est celle de la marche que suivent les coefficiens des transformées successives.

Imaginons que sur un axe indéfini OX, dont l'origine est en O, on ait construit la courbe parabolique $A=y$, dont l'abscisse variable est $l$, et qui sera évidemment la même que $X=y$ ; et qu'on ait placé les lettres $A_1$, $A_2$, $A_3$, ...... aux points où l'axe coupe les branches de la courbe ; ces lettres seront au nombre de $m$, si, comme nous le supposons d'abord, toutes les racines de $X=0$ sont réelles.

Soit construite sur le même axe la courbe $B=y_1$ ; et soient placées les lettres $B_1$, $B_2$, $B_3$, ....... $B_{m-1}$ aux points où cette courbe est coupée par l'axe.

Soit construite semblablement, et toujours sur le même axe ; la courbe $C=y_2$ ; et soient placées les lettres $C_1$, $C_2$, $C_3$, .... $C_{m-2}$, aux points d'intersection de cette courbe avec l'axe.

En poursuivant ainsi, jusqu'au dernier des coefficiens $A$, $B$, $C$, ....., lequel donnera une simple ligne droite ; on remarquera facilement les diverses circonstances que voici,

1.° Les points $B_1$, $B_2$, $B_3$, ..... sont intermédiaires aux points $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... ; les points $C_1$, $C_2$, $C_3$, ..... le sont aux points $B_1$, $B_2$, $B_3$, ..... ; et ainsi de suite.

2.° Les points $B_1$, $B_2$, $B_3$, ..... sont les pieds des ordonnées *maxima* de la courbe $A=y$ ; les points $C_1$, $C_2$, $C_3$, ..... sont les pieds des ordonnées *maxima* de la courbe $B=y_1$ ; et ainsi de suite.

3.° Le coefficient $A$ est *maximum*, quand $B=0$ ; le coefficient $B$ est *maximum*, quand $C=0$ ; et ainsi de suite.

4.° Les coefficiens $A$, $B$, $C$, .... croissent, décroissent et changent de signes respectivement et en même temps que les ordonnées $y$, $y_1$, $y_2$, ..... des diverses courbes paraboliques.

5.° Enfin, toutes ces remarques subsistent, quelle que soit la valeur de $l$; puisque, dans la construction de ces courbes, $l$ a été regardé comme l'abscisse.

Maintenant, il faut faire attention que, quand on change successivement, dans la proposée, $x$ en $x+l_0$, $x+l_0+l_1$, $x+l_0+l_1+l_2$,...; on ne fait que déplacer l'origine des abscisses, en la transportant de O en $O_1$, $O_2$, $O_3$, ..... Les ordonnées $y$, $y_1$, $y_2$, ..... correspondant aux origines successives $O$; $O_1$, $O_2$, ..... indiquent donc, tout à la fois, la grandeur et le signe des coefficiens $A$, $B$, $C$, .... des transformées.

Par là, il devient très-aisé de se rendre compte de la marche des coefficiens; on peut assigner, pour chacun, le signe, l'accroissement ou le décroissement, pour une position donnée de l'origine; ces considérations peuvent même fournir une démonstration très-simple de la *Règle de Descartes*; car il suffit pour cela de placer d'abord l'origine à gauche de toutes les branches, ce qui rend tous les signes alternatifs; puis de remarquer que, quand l'origine dépasse une branche, $A$ change de signe, ce qui fait perdre une variation à l'équation. En continuant à faire mouvoir l'origine de gauche à droite, on se convaincra qu'il en est de même pour chaque racine positive qu'on fait perdre à l'équation.

La considération des mêmes courbes peut encore démontrer facilement la cause du grand nombre de combinaisons de signes que peut fournir une équation et expliquer la signification de chacune d'elles. Prenons un exemple simple; celui de l'équation du 3.me degré.

L'axe OX portera les lettres $OA_1B_1C_1A_2C_1B_2A_3X$. La lettre $C_1$ n'est placée qu'en un seul point, pour une même équation; mais, comme elle peut se trouver à droite ou à gauche du point $A_2$, il a fallu l'écrire deux fois, pour comprendre tous les cas possibles. Il en résulte 9 points qui comprennent entre eux 8 espaces ou ou régions différentes. Chacune de ces régions correspond à une combinaison différente de signes, dont le nombre est ici $1+3+3+1=8=2^3$.

Si l'on considère le nombre des variations, on voit que, quand l'origine est dans l'espace $OA_1$, il y a trois variations dans l'equation; que, quand elle est dans l'espace $A_1A_2$, il y a deux variations; qu'il y en a une seule, quand cette origine est dans l'espace $A_2A_3$; qu'enfin il n'y en a aucune, quand elle est dans l'espace $A_3X$.

Pour le 4.me degré, le nombre des combinaisons de signes est $1+4+6+4+1=16=2^4$. En général, il est $2^m$. C'est la somme $1+\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\ldots$ des coefficiens du développement de $(1+x)^m$.

On sent bien que les racines imaginaires changent la figure des courbes et la position de l'axe; mais elles ne détruisent pas les conséquences que nous voulons en tirer.

Les équations $A=0$, $B=0$, $C=0$, ..... peuvent avoir des racines imaginaires, en sorte que quelques-unes des lettres $A_1$, $A_2$, ...... $B_1$, $B_2$, ...... $C_1$, $C_2$, ...... manquent; ce qui diminue le nombre des régions et par conséquent celui des combinaisons de signes qu'admet la proposée par la transformation de l'origine. Par exemple, si, la proposée étant du 3.me degré, les sommets sont réels; et si l'axe ne rencontre qu'une branche; au lieu de 7 combinaisons de signes, il n'y en aura plus que 5 seulement; parce que les points $A_2$, $A_3$ manqueront. Si les sommets ne sont pas réels, il n'y aura plus que 3 combinaisons de signes; parce que les lettres $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$ n'existeront plus.

Après avoir trouvé la loi des coefficiens $A$, $B$, $C$, ...... dans les transformées successives, il reste à chercher celle de la série $l_0$, $l_1$, $l_2$, ......

On voit que cette loi doit dépendre, jusqu'à un certain point, de la règle que l'on choisit pour déterminer la limite des $x$ : prenons la plus simple. On sait que $V$ étant le plus grand coefficient de signe contraire à celui du terme connu, on aura $l=\frac{A}{A+V}$; $l$ sera donc toujours une fraction, comprise entre o et 1, qui augmentera ou diminuera d'une transformée à la suivante, selon que $A$ aura augmenté ou diminué lui-même dans un plus grand ou dans un moindre rapport que $V$. En outre, quand il surviendra un changement de signe dans l'équation, $V$ qui représentait un coefficient, B par exemple, en représentera un autre, qui entrera à son tour comme élément dans l'expression de $l$; circonstance qui changera nécessairement la marche de la série $l_0$, $l_1$, $l_2$, ......

Il serait minutieux et sans doute pénible de signaler et de classer toutes les anomalies qui peuvent avoir lieu; il suffit de remarquer que c'est le coefficient $A$ qui joue le principal rôle et qui détermine la série à être ascendante ou descendante.

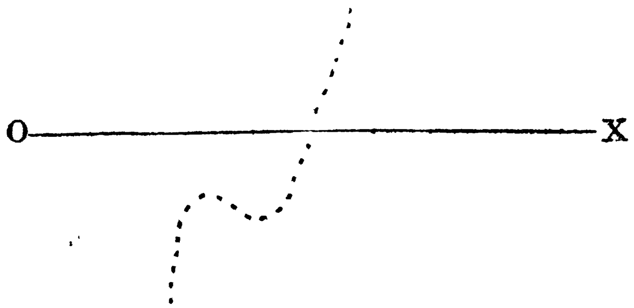
Le cas le plus simple est celui où l'origine est dans la région $OA_1$ et où toutes les racines sont réelles.

Quand on a $l=\frac{A}{A+B}$; à cause de $B=\frac{dA}{dl}$ on a $\frac{A}{B}=\frac{Adl}{dA}=\frac{ydx}{dy}$ $=$ *sous-tangente* $=s$, et $l=\frac{s}{s+A}$; or, $s$ diminue, ainsi que $y$, depuis le point O jusqu'au point $A_1$ où ils sont nuls; donc aussi la série est décroissante entre ces deux points. C'est ce qu'on voit pour l'équation $(x-1)(x-2)(x-3)=0$.

Quand l'origine est entre les points $A_1$ et $B_1$, la série est d'abord croissante, puis elle décroît jusqu'au point $A_2$, comme dans cette équation $(x+1)(x-3)=0$.

Lorsque la proposée a des racines imaginaires, la série suit encore assez exactement les accroissemens et les décroissemens du coefficient $A=y$. Ainsi, à mesure que l'origine s'approche de l'ordonnée *minima*, $A$ diminue d'abord, sans pouvoir néanmoins devenir nul;

puis il augmente sans changer de signe. De même, la série décroît pour croître ensuite et décroître de nouveau, autant de fois qu'il y a d'ordonnées *minima*. L'équation $x^3-6x^2+11x-6,4=0$ est dans ce cas ; la courbe est comme on la voit ici :




On trouvera $l_0=0,37$, $l_6=0,016$, correspondant au sommet convexe, $l_{10}=0,4$ ; $l_{11}=0,3$, correspondant au sommet concave ou ordonnée *maximum*, $l_{12}=0,12$ ; etc.

Cet exemple offre une singularité : c'est que le *maximum* de $l$ arrive avant l'ordonnée *maximum*, par l'effet du changement de coefficient dans le dénominateur de $\frac{A}{A+V}$.

Au reste, il serait oiseux de s'appesantir sur la loi des accroissemens et décroissemens de la série ; car cette circonstance est tout-à-fait indifférente au succès de la méthode. Peu importe la marche de cette série ; l'essentiel est de savoir qu'elle finit toujours par devenir décroissante, et par converger vers l'intersection la plus proche à droite, or, cela est de toute évidence ; car ce n'est que dans les points $A_1$, $A_2$, ...... qu'on a $A=0$, et par conséquent $l=0$.

Mais, nous a demandé un géomètre, ne pourrait-il pas se trouver à gauche de l'intersection dont on cherche à déterminer l'abscisse, un point que la série $l_0+l_1+l_2+$..... ne pût jamais dépasser ; ou, en d'autres termes, ne pourrait-il pas arriver, quelquefois du moins, que la somme des termes de cette série eût une limite inférieure d'une quantité finie à la plus petite des racines positives? Je réponds que non. Tant qu'il existe une variation dans la dernière transformée, rien n'empêche d'en faire de nouvelles qui transportent l'origine sur la droite. Supposons, en effet, l'existence de ce point vraiment singulier; que $k$ soit sa distance à l'origine; en mettant $x+k+l$ pour $x$ dans la proposée, l'origine se trouvera transportée au-delà de ce point, et plus voisine que lui de l'intersection qu'il s'agit d'assigner; mais toujours à sa gauche, si $l$ est suffisamment petit; l'équation aura donc encore au moins une variation; et rien ne s'opposera à ce qu'on fasse de nouvelles transformées; d'où nous nous croyons fondés à conclure que le point en question est tout-à-fait chimérique.

## §. II. *Deuxième partie.*

Je réponds qu'après un certain nombre de transformées, la dernière n'aura plus de variations. En effet, les valeurs de $l$ ne peuvent devenir nulles que lorsque $A$ peut le devenir et $A$ ne peut le devenir dans l'hypothèse où l'équation n'a aucune racine réelle positive, puisque l'axe ne rencontre aucune branche du côté des $x$ positifs. En appelant $L$ la limite supérieure positive; il arrivera un point où l'on aura $l_0+l_1+l_2+\ldots\ldots=L$ ou $>L$; et alors la transformée n'aura plus que des permanences.

On peut démontrer la même proposition, en observant que, dans l'hypothèse dont il s'agit, la proposée est de cette forme

$$(x+\alpha)\{(x\pm y)^2+\Delta^2\}\{(x\pm y')^2+\Delta'^2\}=0 \ (*) \ ;$$

et il est clair que la substitution de $x+l_0$, $x+l_0+l_1$, ….. pour $x$ doit finir par rendre tous les termes positifs ; parce que les termes de la série, au lieu de décroître, comme à la rencontre d'une branche, croissent ici et décroissent alternativement, avec $A$ ou $y$. Ainsi, la disparition des variations avertit bientôt qu'il n'y a point de racines réelles positives à chercher.

Après avoir dissipé les scrupules du géomètre auteur du problème, je vais ajouter quelques remarques propres à éclairer et à simplifier l'usage de la méthode.

*Remarque I.* Quelques auteurs ( LEGENDRE, *Supplément à la théorie des nombres* ) disent qu'après avoir trouvé une racine approchée $\alpha$, il faut diviser la proposée par $x-\alpha$, et chercher les racines du quotient. Ce procédé est très-vicieux ; parce qu'en négligeant le reste de la division, on altère le quotient qui n'est plus exact. Son défaut d'exactitude peut changer des racines imaginaires en racines réelles, égales ou inégales et *vice versâ* ; et l'on sent que cela arrivera sur-tout quand l'axe de la courbe $X=y$ passera fort près d'un sommet. Soit par exemple l'équation

$$x^3-3x-2{,}0000001=0\ ;$$

on trouvera de suite que 2 en est une racine très-approchée ; car, en la mettant pour $x$, l'équation devient $-0{,}0000001=0$ ; or, si l'on divise la proposée par $x-2$, en négligeant le reste, on trouve pour quotient $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$ ; d'où on serait conduit à conclure que, outre la racine déjà trouvée, l'équation a deux autres racines réelles, égales à $-1$ ; tandis que ses deux autres racines sont imaginaires, comme il est aisé de le vérifier.

Si la proposée était $x^3-x-1{,}9999999=0$, en prenant $x=2$ pour valeur approchée de l'une des racines, ce qui réduit le premier membre à $+0{,}0000001$, et opérant comme ci-dessus ; on trouverait encore les deux autres racines égales à $-1$ ; tandis que les trois racines de cette équation sont inégales.

Il serait aisé de former d'autres équations plus élevées où le même procédé conduirait aux mêmes erreurs, en s'arrêtant, pour la première racine, à un degré donné d'approximation

Notre méthode n'est pas sujette à ces inconveniens; parce qu'après avoir trouvé une première racine, c'est sur la proposée elle-même qu'on opère pour déterminer les autres, en y exécutant seulement un changement d'origine qui n'en altère aucunement les coefficiens.

*Remarque II.* Dans la pratique, il est beaucoup plus avantageux de mettre de suite $x+l_0+l_1+l_2+.....$ pour $x$ dans $X=0$, que de mettre successivement $x+l_0$ pour $x$ dans $X=0$ pour avoir $X_1=0$, $x+l_1$ pour $x$ dans $X_1=0$ pour avoir $X_2=0$, et ainsi de suite, quoique d'ailleurs la chose soit indifférente en théorie. En effet, dans le dernier procédé, les lettres $a$, $b$, $c$,..... changent et acquièrent un nombre de chiffres décimaux toujours croissant; ce qui finit par rendre les calculs impraticables. Et, si, pour parer à cet inconvénient, on prend le parti de négliger des décimales, on retombe dans l'inconvénient beaucoup plus grave d'altérer les transformées, et, par suite, de denaturer les racines, comme on l'a vu dans la remarque précédente.

*Remarque III.* Quand on a trouvé la plus petite racine positive avec le degré d'exactitude dont on a besoin; pour découvrir la seconde racine positive, s'il y en a, il faut mettre dans la proposée $X=0$, $x+h$ pour $x$, $h$ étant un nombre un peu plus grand que la racine trouvée, et tel que la transformée qui en résulte aie une variation de moins que la dernière transformée. Un ou deux tâtonnemens suffisent pour trouver un pareil nombre $h$; et on est alors assuré de n'avoir dépassé qu'une branche de la courbe, et l'on forme de nouvelles transformées qui procurent une seconde série $l_0+l_1+l_2+.....$, au moyen de laquelle la seconde racine se trouve exprimée par $h+l_0+l_1+l_2+.......$ On procède de même à la recherche des autres racines; mais il faut remarquer pourtant que tout ceci suppose qu'on a préalablement délivré l'équation de toutes les racines égales qu'elle peut contenir; ce qu'au surplus on peut toujours faire.

Pour avoir les racines négatives, on change $+x$ en $-x$ dans la proposée et on détermine les racines positives de la nouvelle équation, lesquelles, prises avec le signe $-$, sont les racines négatives de la proposée.

Ainsi, voilà un procédé régulier uniforme et simple, qui n'exige qu'un nombre $m-1$ de tâtonnemens, au plus, pour déterminer, d'une manière sure, toutes les racines réelles d'une équation quelconque.

*Simplification de la méthode.* En réfléchissant sur la précédente méthode, on reconnait bientôt qu'on peut diminuer considérablement le nombre des transformées, en prenant pour $l$ un nombre plus grand que celui qui est fourni par la règle imparfaite des limites. On avancera ainsi, à grands pas, le long de l'axe; et la diminution progressive du terme $A$ avertira toujours qu'on est près d'une branche; que s'il arrive qu'on l'ait dépassée, la racine cherchée se trouvera par-là même renfermée entre deux limites qu'il sera ensuite très-facile de resserrer, en prenant pour $l$ la fraction $-\frac{A}{B}$, fournie par la dernière transformée. Ceci suppose, au surplus, qu'on n'a dépassé qu'une branche, ce que l'on reconnaîtra par la dernière transformée qui ne doit avoir perdu qu'une variation. S'il arrivait qu'elle en eût perdu plus d'une, on reviendrait sur ses pas, en prenant pour $l$ un nombre plus petit.

Ce procédé a quelque ressemblance avec la méthode ordinaire des substitutions, et avec celle de *Newton*; mais il n'en a pas les inconvéniens. En effet, on sait que deux substitutions qui donnent pour $X$ des résultats de signes contraires peuvent intercepter un nombre impair de racines réelles ou imaginaires; or, par la méthode vulgaire des substitutions, on ne peut point discerner le nombre des racines interceptées, tandis que, par la nôtre, la diminution de $A$, et les variations perdues, font toujours connaître le nombre des branches dépassées par la translation de l'origine des abscisses: c'est un fanal qui est là pour éclairer tous les écueils.

La circonstance de deux variations perdues mérite un examen particulier; elle a lieu dans trois cas, savoir: 1.° quand l'origine