ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRANCŒUR

Géométrie élémentaire. Solution des problèmes de mathématiques proposés au concours général des colleges royaux de Paris, en 1819

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 73-83

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__73_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Solution des problèmes de mathématiques proposés au concours général des colleges royaux de Paris, en 1819;

Par M. Francœur, professeur à la faculté des sciences de Paris.

Les problèmes qu'on a proposés cette année au concours général des colléges royaux de la Capitale m'ont semblé susceptibles de solutions élégantes. Celui de mathématiques élémentaires, en particulier, m'ayant paru faiblement résolu par les concurrens; ce qui tient sans doute à la difficulté du sujet; j'ai pensé que les géomètres pourraient ne pas voir sans quelque intérêt les recherches auxquelles je me suis livré sur ces divers problèmes; et c'est ce qui me détermine à les consigner ici.

Mathématiques élémentaires.

Problème unique. Par un point donné dans un angle, et également distant de ses deux côtés, mener une droite, terminée à ces mêmes côtés, de telle sorte que le point donné la divise en deux segmens dont la somme des quarrés soit équivalente à un quarré donné?

Solution. Soient DAE l'angle donné (fig. 1), et O le point donné, également distant des côtés AD, AE; soit DE la droite cherchée, et soit b le côté du quarré auquel la somme des quarrés des segmens OD, OE doit être équivalente.

Soient menées OB, OC respectivement parallèles à AE, AD; la figure BC sera un lozange donné, dont nous représenterons le côté par a. Soient, en outre, Ang.DAE$=\alpha$, BD$=x$, CE$=y$.

Le triangle OBD donne $\overline{OD}^2=a^2+x^2-2ax\text{Cos.}\alpha$;

Le triangle OCE donne $\overline{OE}^2=a^2+y^2-2ay\text{Cos.}\alpha$;

on a donc par la condition du problème

$$x^2+y^2-2a(x+y)\text{Cos.}\alpha+2a^2=b^2 . \qquad (1)$$

Les triangles semblables DBO, OCE donnent d'ailleurs

$$\frac{DB}{BO}=\frac{OC}{CE} , \quad \text{c'est-à-dire} , \quad \frac{x}{a}=\frac{a}{y} ;$$

ou encore

$$xy=a^2 . \qquad (2)$$

Voilà donc deux équations pour déterminer x et y; et conséquemment le problème pourrait, en toute rigueur, être réputé résolu.

En mettant pour a^2, dans la première équation, sa valeur xy donnée par la seconde, elle prend cette nouvelle forme

$$(x+y)^2-2a(x+y)\text{Cos.}\alpha-b^2=0 ; \qquad (3)$$

d'où on tire

$$x+y=a\text{Cos.}\alpha\pm\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\alpha} .$$

On connait donc présentement la somme et le produit des deux inconnues

x, y; ces deux inconnues sont donc racines d'une même équation du second degré, et, puisque $x+y$ a déjà deux valeurs, le problème a quatre solutions. On voit, au surplus, qu'à cause de la symetrie de la figure, ces quatre solutions se réduisent réellement à deux.

Soit abaissée du point B la perpendiculaire BI sur AC, et désignons AI par c; nous aurons

$$c=\mathrm{AI}=a\mathrm{Cos.}\alpha\ ;$$

d'où

$$x+y=c\pm\sqrt{b^2+c^2}\ .$$

Prolongeons IB jusqu'en G, au-delà de B, de manière qu'on ait $\mathrm{IG}=b$; en menant AG, et en représentant par d la longueur de cette droite, nous aurons

$$d=\mathrm{AG}=\sqrt{b^2+c^2}\ ;$$

ce qui donnera

$$x+y=c\pm d\ ;$$

équation fort simple, qu'il faudra combiner avec (2), pour avoir x, y.

L'élimination de y entre ces deux équations donnera, comme l'on sait,

$$x^2-(c\pm d)x+a^2=0\ ,$$

d'où

$$x=\tfrac{1}{2}(c\pm d)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(c\pm d)^2-a^2}\ ;$$

et l'on aurait semblablement

$$y=\tfrac{1}{2}(c\pm d)\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}(c\pm d)^2-a^2}\ .$$

Si l'on porte AG sur AE, de part et d'autre du point A, en H et H′, on aura $\mathrm{IH}=d-c$, $\mathrm{IH}'=d+c$. Les moitiés de ces deux distances étant prises pour hypothénuses de deux triangles ayant un des côtés de l'angle droit égal à a, l'autre côté de l'angle droit de ce triangle sera la valeur de notre radical ; et le reste de la construction ne souffrira plus aucune difficulté.

A cause que x, y entrent symétriquement dans les équations du problème, on peut ne prendre que le signe supérieur du radical dans les valeurs de x, y ; on obtiendra ainsi deux solutions du problème desquelles on déduira facilement les deux autres en observant que les quatre droites qui le résolvent doivent être, deux à deux, symétriquement situées par rapport à la droite AO.

A cause de $d>c$, on voit que, lorsque les quatre valeurs de x, y seront réelles et inégales, il y en a toujours deux positives et deux négatives ; ces dernières devant être portées en sens inverse des premières, il s'ensuit qu'il y a alors deux solutions dans l'angle DAE, tandis que les deux autres sont dans ses deux supplémens. La figure 2 représente l'ensemble de ces quatre solutions. Les quatre droites cherchées sont DE, D′E′, de, $d'e'$, tellement situées que l'on a $\mathrm{AD}'=\mathrm{AE}$, $\mathrm{A}d'=\mathrm{A}e$; et l'on a en outre

$$\overline{\mathrm{OD}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2=\overline{\mathrm{OD}'}^2+\overline{\mathrm{OE}'}^2=\overline{\mathrm{O}d}^2+\overline{\mathrm{O}e}^2=\overline{\mathrm{O}d'}^2+\overline{\mathrm{O}e'}^2=b^2 \ .$$

Tant que a sera plus petit que $\frac{1}{2}(d-c)$, il sera, à plus forte raison, plus petit que $\frac{1}{2}(d+c)$, et le problème admettra quatre solutions distinctes. Si l'on a $a=\frac{1}{2}(d-c)$, ou

$$2a=\sqrt{b^2+a^2\mathrm{Cos.}^2\alpha}-a\mathrm{Cos.}\alpha \ ;$$

ou, en chassant le radical,

$$b^2=4a^2(1+\mathrm{Cos.}\alpha)=8a^2\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\alpha=2\overline{\mathrm{AO}}^2 \ ,$$

ou enfin

$$b=\mathrm{AO}\sqrt{2} \ ;$$

les deux droites Od, Od' se confondront dans la seule droite OA, et le problème n'aura plus que trois solutions. Il n'en aura que deux seulement, lesquelles tomberont toutes deux dans l'angle BAC, lorsque a sera compris entre $\frac{1}{2}(d-c)$ et $\frac{1}{2}(d+c)$. Ces deux solutions se réduiront en une seule lorsqu'on aura $a=\frac{1}{2}(d+c)$, ou

$$2a=\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}\alpha}+a\text{Cos.}\alpha\ ,$$

ou, en chassant le radical,

$$b^2=4a^2(1-\text{Cos.}\alpha)=8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha\ ;$$

et les deux droites DE, D$'$E$'$ se confondront alors dans une seule perpendiculaire menée à AO par le point O. Enfin, si l'on a $a>\frac{1}{2}(d+c)$, les quatre valeurs de x, y seront imaginaires, et le problème ne pourra plus être résolu.

Dans le cas où l'angle donné α est droit, le lozange ABOC devient un quarré (fig. 3); on a Cos.$\alpha=0$, $c=0$, $d=b$, et partant

$$x=\pm\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2-a^2}\ ;$$

les quatre racines sont à la fois réelles ou à la fois imaginaires, suivant qu'on a $b>2a$ ou $b<2a$; et, dans le premier cas, deux sont positives et les deux autres négatives. Rien d'ailleurs n'est plus facile alors que de construire le problème.

Si, en effet, du centre O, et d'un rayon égal à $\frac{1}{2}b$ on décrit un arc, coupant AB en L et AC en L$'$, et qu'ensuite des points L, L$'$ et avec les rayons respectifs LO, L$'$O on décrive des demi-cercles terminés, le premier sur AB en D$'$, d', et le second sur AC en Ee'; en menant par ces points et par le point O les droites DE, D$'$E$'$, de, $d'e'$; ces quatre droites résoudront le problème.

Au lieu d'éliminer y, entre les équations

$$xy=a^2\ ,\quad x+y=c\pm d\ ,$$

on peut en déduire les valeurs de x, y, par l'intersection des lieux géométriques de la manière suivante :

Si l'on prend l'angle donné pour angle des coordonnées positives, la première de ces deux équations sera celle d'une hyperbole passant par le point O, et ayant pour asymptotes les deux côtés de cet angle ; hyperbole qui se trouve ainsi tout-à-fait déterminée. Quant à l'autre, c'est celle d'une droite déterminant sur les axes, à partir de l'origine, des segmens égaux entre eux et à $c \pm d$. En répétant donc (fig. 4) la même construction que dans la figure 1.re, et portant d'une part IH' sur AC, vers C, de A en Q, et de l'autre IH sur la même droite, en sens inverse, de A en q' ; si des points Q, q' on abaisse sur AO les perpendiculaires QQ', qq', coupant cette droite en R, r, les abscisses des intersections de ces droites avec l'hyperbole seront les quatre valeurs de x. Ainsi, par exemple, dans le cas de la figure, le problème n'admettra que deux solutions, parce que qq' ne rencontre pas la courbe.

Mais on peut, dans cette construction, remplacer l'hyperbole par le cercle. Si, en effet, du quarré de l'équation $x+y=c \pm d$ on retranche le produit de l'équation $xy=a^2$ par $2(1-\text{Cos.}\alpha)=4\text{Sin.}^2\frac{1}{2}\alpha$, il viendra

$$x^2+y^2+2xy\text{Cos.}\alpha=(c \pm d)^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha\ ;$$

équation d'un cercle rapporté aux deux côtés de l'angle donné comme axes, ayant son centre à l'origine, et son rayon R donné par la formule

$$R=\sqrt{(c \pm d)^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha}\ .$$

Ayant donc construit, comme ci-dessus, les deux droites QQ', qq' (fig. 5), nous aurons, comme alors $AQ=c+d$, $Aq'=c-d$. Si, de plus, nous menons la diagonale BC du lozange, nous aurons $BC=2a\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha$; les deux valeurs de R deviendront donc

$$R=\sqrt{\overline{AQ}^2-\overline{BC}^2}\ ,\qquad R=\sqrt{\overline{Aq'}^2-\overline{BC}^2}\ .$$

Soit donc k le centre du lozange. En prolongeant kB, au-delà de B, d'une quantité $Bf=Bk$; du point f comme centre et de deux rayons respectivement égaux à AQ, Aq', on décrira deux arcs coupant AO en g, g' ; puis du centre A, et avec les rayons kg, kg', on decrira deux cercles, dont les intersections respectives avec QQ$'$, qq' auront pour abscisses les valeurs cherchées de x. On voit donc qu'ici, comme dans la figure précédente, le problème n'admettra que deux solutions.

Mathématiques spéciales.

PROBLÈME I. Une droite se meut sur le plan d'un angle donné, dont les côtés ont une longueur indéfinie, de manière à former avec ces côtés un triangle dont l'aire soit constante et donnée ; à quelle courbe appartient le centre de gravité de l'aire de ce triangle, point déterminé par la condition que les droites qui le joignent aux trois sommets du triangle partagent ce triangle en trois parties équivalentes ?

Solution. Soit l'angle donné $BAC=\alpha$ (fig. 6) ; soit BC l'une des positions de la droite mobile ; soit $9a^2$ l'aire constante du triangle variable BAC ; et soit enfin G la position du centre de gravité qui répond à celle de BC.

Soient menées GA, GB, GC ; on devra avoir, par l'énoncé $AGB=BGC=CGA=\frac{1}{3}BAC=3a^2$. Soit divisé AC en trois parties égales en K, L ; soient menés GK, GL, BK, et soit prolongée BG jusqu'à la rencontre de AC en O.

Les triangles AKB, AGB sont équivalens, comme étant l'un et l'autre le tiers de BAC ; d'où il suit que KG est parallèle à AB ; GL est donc semblablement parallèle à BC. Les triangles ABC, KGL sont donc semblables ; et, puisque KL est le tiers de AC ; GK et GL doivent être respectivement le tiers de BA et BC ; donc aussi OK, OL sont les tiers respectifs de OA, OC, ou les moitiés de KA, LC ; donc le point O est le milieu de AC ; ce qui démontre une propriété connue du centre de gravité, d'après la définition admise dans l'énoncé du problème.

Soient pris les deux côtés de l'angle donné pour les axes des coordonnées ; et en conséquence, soient faits $AK=x$, $GK=y$; on aura $AC=3x$, $AB=3y$. Mais l'aire $BAC=\frac{1}{2}AB.AC.\text{Sin}.\alpha$; on aura donc, en substituant,

$$\tfrac{1}{2}xy\text{Sin}.\alpha=a^2\,, \qquad \text{ou} \qquad xy=\frac{2a^2}{\text{Sin}.\alpha}=M^2\,.$$

La courbe cherchée est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les côtés de l'angle donné, et dont la puissance est M^2, constante connue.

Pour construire cette courbe ; on prendra $AE=M$ (fig. 7) ; on formera le lozange AESD, dont le sommet S sera le sommet de l'hyperbole, ayant pour asymptotes les côtés AD, AE de l'angle donné. La courbe sera donc complètement déterminée. Elle aura d'ailleurs, pour les longueurs de ses demi-diamètres principaux, les diagonales AS et DE du lozange dont il vient d'être question.

Dans le sens strict de l'énoncé du problème, l'autre branche d'hyperbole, comprise dans l'opposé au sommet de l'angle DAE, est inutile à sa solution ; mais cette branche, ainsi que les hyperboles conjuguées à la première que l'on construirait dans les deux supplémens de l'angle DAE, devraient entrer en considération, dans le cas où l'on donnerait au problème cet énoncé général :

Deux droites fixes d'une longueur indéfinie se coupant sur un plan sous un angle donné, et une autre droite, aussi indéfinie, étant mue sur ce plan, de manière à former, avec les deux premières, un triangle dont l'aire soit donnée et constante ; quel est le lieu du centre de gravité de l'aire de ce triangle ?

Sous-

Sous cet énoncé général, la courbe, formée de quatre branches hyperboliques, aurait pour équation

$$xy\mathrm{Sin}.\alpha=\pm 2a^2 \ .$$

PROBLÈME II. Un angle trièdre fixe étant donné dans l'espace ; on suppose qu'un plan indéfini se meut de manière à former avec les trois faces de cet angle trièdre, un tétraèdre dont le volume soit constant et donné ; et on demande quel sera le lieu du centre de gravité du volume de ce tétraèdre ; point déterminé par cette condition que les quatre tétraèdres qui, y ayant leurs sommets, auront pour bases les quatre faces du tétraèdre dont il vient d'être question, devront être équivalens ?

Solution. Soient SAB, BAC, CAS (fig. 8) les trois faces de l'angle trièdre donné, dont le sommet est en A; soit BSC l'une des positions du plan mobile ; soit G le centre de gravité qui lui répond ; et soit enfin $64a^3$ le volume constant du tétraèdre SABC.

Soit menée SG prolongée jusqu'à la rencontre du plan BAC en O; soit menée AO; et, par le point G, soit menée, parallèlement à l'arète SA, une droite se terminant à AO en D. Soit encore menée BD, prolongée jusqu'à la rencontre de AC en R; soient, en outre, menées DQ, DP, respectivement parallèles à AB, AC, et se terminant à ces droites en Q, P. Menons enfin DC.

A cause de GD parallèle à AS, et conséquemment au plan de la face CAS, les deux tétraèdres qui, ayant cette face pour base commune auront leurs sommets en G et D, devront être équivalens ; mais, puisque le premier doit être le quart du tétraèdre total SABC, le dernier doit l'être aussi ; donc ADC est le quart de ABC ; donc DR est le quart de BR, et conséquemment PA le quart de BA. On prouverait semblablement que QA est le quart de CA ; d'où il serait facile de déduire que O est le centre de gravité de l'aire du triangle BAC, que GO est le quart de SO, et d'obtenir ainsi toutes les propriétés connues du centre de gravité du volume du tétraèdre, en partant de la définition comprise dans l'énoncé du problème.

Soient prises les trois droites AB, AC, AS pour axes des coordonnées. Soient faits $AP=x$, $PD=y$, $DG=z$, nous aurons

$$AB=4x\ ,\quad AC=4y\ ,\quad AS=4z$$

soient, en outre, θ l'angle que fait AS avec sa projection orthogonale sur la base BAC, et soit l'angle $CAB=\varphi$; la hauteur du tétraèdre total SABC sera évidemment $SA\mathrm{Sin}.\theta$; l'aire de sa base étant d'ailleurs $\frac{1}{2}AB.AC\mathrm{Sin}.\varphi$; son volume sera

$$SABC=\tfrac{1}{6}AB.AC.AS.\mathrm{Sin}.\varphi\mathrm{Sin}.\theta\ ;$$

en substituant donc, nous aurons pour l'équation de la surface cherchée, lieu de tous les points G,

$$xyz=\frac{6a^3}{\mathrm{Sin}.\varphi\mathrm{Sin}.\theta}\ ;$$

surface du troisième ordre.

Pour en étudier la forme, nous remarquerons que, si l'on fait $z=a$, on a $xy=Const.$, équation d'une hyperbole entre ses asymptotes; et l'on pourrait faire la même remarque pour x et y. Ainsi cette surface est telle que toutes ses sections parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés sont des hyperboles ayant pour asymptotes les intersections des deux autres plans coordonnés par le même plan; et il n'en faut pas d'avantage pour apercevoir que la nappe de cette surface, comprise dans l'angle trièdre proposé, s'étend à l'infini et a pour plans asymptotiques les faces même de cet angle trièdre par lesquelles elle est d'ailleurs circonscrite.

Cette nappe seule résout le problème, dans le sens strict de son énoncé ; mais si, au lieu d'un angle trièdre, on considère trois plans indéfinis passant par un même point, et formant 8 angles trièdres autour de ce point, le problème pourra être indistinctement résolu par toutes les nappes de cette surface, lesquelles sont au nombre de *quatre*, et tellement disposées entre elles, que deux ne se trouvent jamais situées dans deux angles opposés aux sommets. Les angles où elles se trouvent sont, 1.° l'angle des x, y, z positifs ; 2.° les trois angles pour lesquels une seule des trois coordonnées x, y, z est positive.

On peut donner à l'équation de cette surface une forme symétrique, en y introduisant les angles α, β que forme l'arète SA avec les arètes AB, AC ; il suffit pour cela de remarquer que, suivant les notes de la *Géométrie* de M. LEGENDRE, on a

$$\text{Sin.}\theta\,\text{Sin.}\varphi=2\sqrt{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\beta+\varphi-\alpha)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varphi+\alpha-\beta)}\ ;$$

et d'introduire cette valeur dans l'équation ci-dessus.